

同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

毕业设计（论文）

考虑供给影响的动态拼车订单匹配成功率、
预期绕行和预期共乘里程预测

副标题 /

学院 经济与管理学院

专业 信息管理与信息系统

学生姓名 封钰震

学号 1951362

指导教师 王晓蕾 教授

日期 2023年6月1日

考虑供给影响的动态拼车订单匹配成功率、预期绕行和预期共乘里程预测

摘要

近年来，随着无线通信技术、全球定位技术和智能手机的普及，网约车服务已经得到了前所未有的发展。然而，网约车的普及也加剧了城市交通拥堵和车辆尾气排放等问题。相比之下，动态拼车服务是一种更加环保的网约车新模式。在动态拼车服务中，平台可以实时响应乘客出行需求，调度空闲的或部分被占用的车辆，并能够在沿途不断检索新的匹配订单。动态拼车服务的实时性带来了许多不确定因素，包括供需不确定性、里程不确定性、价格不确定性等。面对这些不确定性，平台需要对整个系统甚至每个订单的关键指标进行整体评估和事前预测，以便在面临不同需求和供给时能够规划其服务，从而提高利润、提升服务质量。

本文提出了一种模型驱动的方法，以预测动态拼车系统稳定状态下各订单的匹配成功率、预期共乘/绕行里程和预期等待时长等指标，并进一步预测整个系统的效率和效益的指标。本文假设每个动态拼车乘客在整个行程中最多与另外一人共乘，并且每个起点-终点（OD）对间的拼车订单和空车供给遵循具有给定速率的泊松过程。为了考虑空车供给的动态性，本文将各 OD 对起点处的订单/空车排队队列建模为一个连续时间马尔可夫链。另外，本文定义了每个 OD 对间沿着行驶路径的不同位置上未匹配订单的寻车、排队、寻人、接载四种状态，将不同状态下的匹配概率、匹配机会到达速率和未匹配订单到达速率间的复杂相互依赖关系刻画为一个非线性方程组，通过该非线性方程组的解进而可以计算每个 OD 对间订单以及整个系统的相应指标。

为了验证本文提出的模型的有效性，我们基于一个网格网络对每个 OD 对间订单的关键指标进行了计算，同时利用离散事件仿真模拟了动态拼车订单的发生、移动和状态转换。结果表明，本文提出的模型的预测结果与仿真结果非常接近，证明了模型的准确性。利用本文的模型，我们还分别在动态拼车模式和不拼车模式中，考察了不同空车供给率和平台规模的条件下，整个系统里订单、车辆和平台的整体效率和效益。结果表明，动态拼车模式相比于不拼车模式而言，订单等待时长小、车辆总行驶里程短、平台利润高且具有规模效应，是一种更优的网约车模式。

关键词： 动态拼车， 空车供给， 匹配成功率， 行驶里程

Predicting the matching probability and the expected detour/shared distance for each dynamic ridepooling order: Considering the impact of empty vehicle supply

ABSTRACT

In recent years, the popularity of ridesourcing services has grown tremendously due to the proliferation of wireless communication technology, global positioning technology, and smartphones. However, the rise of ridesourcing has also exacerbated urban traffic congestion and vehicle emissions. In contrast, dynamic ridepooling services are a more environmentally friendly mode of ridesourcing. In dynamic ridepooling services, service providers respond to on-demand mobility requests immediately, dispatch (vacant or partially occupied) vehicles in real-time, and keep searching for matching orders along the trip. The real-time nature of dynamic ridepooling services introduces many uncertainties, including supply and demand uncertainties, mileage uncertainties, price uncertainties, etc. In the face of these uncertainties, the platform needs to conduct an overall assessment and prediction in advance of the key indicators of the entire system and even each order, so that it can plan its services when faced with different demands and supplies, thereby increasing profits and improving service quality.

We propose a model-driven approach to predict indicators for each order, such as the matching probability, expected shared/detour distance, and expected waiting time in the steady state of the dynamic ridepooling system, and further predict the indicators of the efficiency and profit of the entire system. We assume that each passenger shares with at most one other person throughout the trip, and the arrival of orders and empty cars between each origin-destination (OD) pair follow a Poisson process with given rates. In order to consider the dynamics of empty car supply, this paper models the order/empty car queue at the origin of each OD pair as a continuous-time Markov chain. In addition, we define four states of unmatched orders at different positions along the driving path between each OD pair: vehicle-seeker, queuer, passenger-seeker, and taker. The complex interdependence between matching probability, matching opportunity arrival rate, and unmatched order arrival rate of each state is formulated as a nonlinear equation system, and the corresponding indicators of each OD pair order and the entire system can be calculated through the solution to the nonlinear equations.

To verify the validity of the proposed model, the key indicators of each OD pair order are calculated based on a grid network, and discrete event simulation is used to simulate the occurrence, movement, and state transition of each dynamic ridepooling order. The results show that the prediction results of the proposed model are very close to the simulation results, which proves the accuracy of the model. Using the proposed model, the overall efficiency and profits of orders, vehicles, and platforms in the entire system are investigated under the conditions of different empty car supply rates and platform scales in the dynamic ridepooling mode and the non-ridepooling mode. The results show that, compared with the non-ridepooling

mode, the dynamic ridepooling mode is a better ridesourcing mode because of its shorter order waiting time, shorter total vehicle mileage, high platform profit, and scale effect.

Keywords: Dynamic ridepooling, Empty vehicle supply, Matching probability, Ride distance

装
订
线

目录

1	绪论	1
1.1	研究背景与意义	1
1.2	研究综述	2
1.2.1	网约车平台运营	2
1.2.2	动态拼车系统运营	4
1.2.3	研究现状总结	6
1.3	研究思路与内容	6
2	场景设定	8
2.1	动态拼车过程描述	8
2.2	基本符号定义	9
2.3	本章小结	12
3	模型构建	13
3.1	订单/空车排队过程建模	13
3.2	订单匹配过程建模	16
3.3	订单关键指标计算	21
3.4	系统关键指标计算	23
3.5	本章小结	24
4	数值实验	25
4.1	订单/空车排队过程	25
4.2	动态拼车系统预测与仿真	26
4.3	供给、平台规模和网约车模式的影响分析	31
4.4	本章小结	33
5	总结与展望	34
5.1	研究总结	34
5.2	研究展望	34
	参考文献	36
A	符号表	40

B 命题与定理证明	42
B.1 命题 3.1 和命题 3.2 证明	42
B.2 命题 3.3 的证明	43
B.3 命题 3.4 的证明	45
C 符合匹配条件的匹配对集合检索步骤	48
D 不拼车模式下订单关键指标计算	50
谢辞	51

装
订
线

1 绪论

1.1 研究背景与意义

随着无线通信技术、全球定位技术和智能手机的普及，网约车服务拥有了前所未有的发展条件。根据《第 48 次中国互联网络发展状况统计报告》^[1]，截至 2021 年 6 月，我国网约车用户规模达 3.97 亿，较 2020 年 12 月增长 3,123 万，并占网民整体的 39.2%。这表明，网约车服务作为一种新兴的出行方式已经被大众广泛接受。

然而，相比于私家车，网约车司机需要在接到订单后前往乘客的位置，将乘客送到目的地后，司机再前往下一个订单的起点，这增加了很多空车无效行驶里程。根据一份由美国可持续交通中心发布的白皮书^[2]，使用网约车服务城市出行需求可能会导致城市车辆行驶里程增加 6.5% - 11%，这进而加剧了城市交通拥堵和车辆尾气排放等问题。为了应对这些问题，针对网约车服务的行政法规越来越严格，一些国家和地区出台法律法规对网约车服务的规模进行限制。例如，中国上海于 2016 年颁布《上海市网络预约出租汽车经营服务管理若干规定》，规定从事网约车经营服务的平台、车辆和驾驶员条件，在一定程度上限制了网约车的数量^[3]；美国纽约于 2018 年实行政策，限制新的网约车司机的进行注册数量^[4]。

随着对网约车服务的限制越来越严格，许多企业开始寻找新的发展方式；其中，动态拼车服务是一种备受关注的新模式。许多企业，包括滴滴拼车、优步等，已经开始发展动态拼车服务。动态拼车服务通过将网约车或出租车乘客的出行时间和出行路径匹配，实现了车内空间的共享和出行费用的分摊。它与传统拼车服务的不同之处在于响应需求的实时性：在传统拼车服务中，乘客一般需要提前一段时间进行预约，因此，在车辆出发前服务对象的信息都是已知的；而在动态拼车服务中，乘客只需要在出行前几分钟发布出行需求即可，平台即使在没有可拼乘客的情况下也会迅速派车，并在服务乘客的沿途持续地为其寻找拼车伙伴。通过将出行需求实时进行匹配，动态拼车能够更加高效地利用车辆资源、减少空车行驶里程，也能够为广大出行需求者提供更为灵活和便捷的服务。这不仅可以降低平台的运营成本，扩大网约车市场的受众群体，增加平台收入和利润，还可以减少交通拥堵和尾气排放，为环境保护做出贡献。

然而，能否真正高效地实现动态拼车服务，取决于平台的实际运营水平。首先，平台需要确定合适的车队规模，以一定服务水平下满足客户需求，同时最大程度地利用车队资源。其次，平台需要确定每个订单的价格，以吸引用户使用动态拼车服务，同时保证平台的盈利能力。此外，平台还需要优化派单和空车调度算法，以尽可能减少空车无效行驶，提升服务效率和实现成本节约。可是，动态拼车服务的实时性带来了许多不确定因素，例如，平台在乘客发送需求时，并不知道乘客是否能在路途中被匹配、预计会绕行/共乘多少里程、乘坐的车辆是否能在到达乘客目的地后匹配到新订单等。这些不确定因素会让平台对车队规模、定价、派单和空车调度等决策变得更加困难。面对动态拼车系统的高度不确定性，平台需要对整个系统甚至每个订单面临的不确定性进行预测，以便在面临不同需求和供给时能够规划其服务，从而提升服务质量。具体而言，需要预测的指标可能包括整个系统/每个订单的拼车成功率、整个系统平均每分钟的车辆行驶里程、每个订单的预期绕行/共乘里程等、整个系统/每个订单的乘客等待时长。基于这些信息，一方面，平台可以进行战术层面的规划，包括优化车队规模、确定基础定价等；另一方面，这些信息也能被融入平台运营层面的决策

中，例如派单优化或空车调度，使得这些决策能够考虑各变量间的复杂关联性，进而更具系统性和前瞻性。

平台可以使用数据驱动的预测方法，通过收集大量数据，从这些数据中挖掘特征作为输入，并利用机器学习方法训练模型预测这些指标。然而，动态拼车系统内部各变量之间的关系非常紧密，可能存在着多种相互作用，因此需要建立复杂的模型才能准确预测各种指标，这为数据驱动的预测方法带来了挑战。相比之下，模型驱动的预测方法能更好地厘清系统内部各变量之间的关系，从而更加准确地预测这些指标。对于动态拼车系统而言，模型驱动的预测方法仅依赖路网结构和每个起点-终点（OD）对之间拼车需求和空车供给的平均到达率等简单参数，避免了对海量数据的依赖，且对理解动态拼车系统的本质和机制、推动动态拼车平台服务运营优化的理论研究也具有重要意义。

为了使模型更加符合实际情况，并准确预测整个系统/每个订单的各项指标，我们需要考虑动态拼车系统中空车供给的动态性和异质性，并将这些因素融入我们的数学模型中。空车供给的动态性和异质性指的是空车供给在时间和空间上的变化和差异，不同区域在不同空间的空车数量不尽相同，且会随着时间的变化而变化，这一时刻的空车数量可能会由于订单到达、平台派单、空车调度等事件发生而在下一时刻发生变化。

本研究针对动态拼车系统，基于 Wang 等人^[5]提出的模型驱动的预测方法，进一步考虑空车供给的动态性和异质性，建立更加准确、符合实际的数学模型，以更好地预测整个系统/每个订单的拼车成功率、预期绕行/共乘里程、车辆行驶里程、乘客等待时长等关键指标。本研究的成果将帮助人们更加深入地理解动态拼车系统内部的复杂关联性，为动态拼车服务的车队规模、定价、派单、空车调度等重要规划运营决策问题提供工具，并能以此入手提高动态拼车的效率，从而尽可能缓解网约车带来的城市交通拥堵和道路环境污染，进而为实现智慧城市、智能交通和环境可持续发展等方面的目标做出贡献。因此，本研究具备高度的理论和实际价值。

1.2 研究综述

1.2.1 网约车平台运营

动态拼车服务一般是网约车平台的子服务，因此需要解决网约车平台面临的共性运营问题。Wang 和 Yang^[6]总结了如图 1.1 所示的一般框架，综述了网约车服务中的重要研究主题以及相关方法论的实施和发展。具体而言，这些研究主题包括需求和定价、供给和激励、平台运营以及竞争、影响和监管等。平台需要做出多种决策来实现其短期和长期目标，这些决策包括定价策略、激励措施、派单和匹配、空车调度、信息共享以及评分机制等。平台的目标也存在多个维度，并且可能会随着发展阶段、市场条件、平台竞争以及政府监管等改变而发生变化。一些常见的目标包括平衡乘客需求和司机（或车辆）供给，最大化长期和/或短期平台利润、市场份额和渗透率以及最大化社会福利等。这些目标之间可能存在冲突，因此平台需要考虑如何在不同目标之间进行权衡，并采取相应的策略来实现这些目标。

为了解决网约车服务中的这些决策问题，平台需要预测与这些决策相关的信息。当前的研究集中在对网约车需求进行预测，主要应用的方法是机器学习的相关技术。一些学者研究了基于区域的需求预测。Ke 等人^[7]提出了一种深度学习方法来预测短期内各区域的网约车需求，该方法融合了

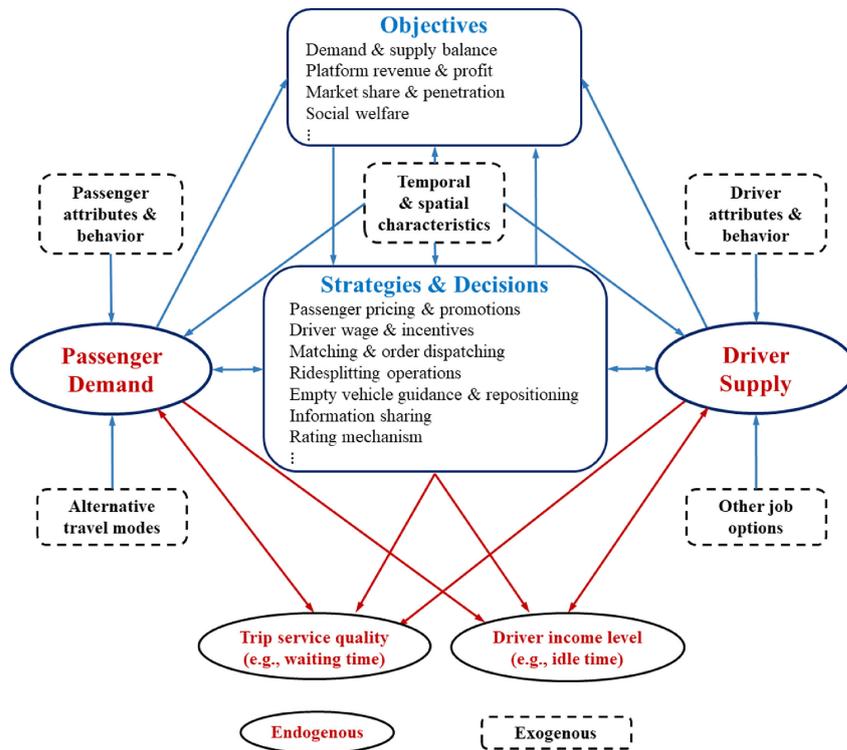


图 1.1: 网约车系统运营的一般框架^[6]

卷积技术和长短期记忆网络，能够更好地捕捉解释变量的时空特征和它们之间的相关性。Wang 等人^[8]提出了一个深度学习框架，注重预测未来几分钟内某一区域供给和需求之间的差距；但是，他们只考虑了变量的时间特征，忽略了变量在空间上的联系。Ke 等人^[9]进一步同时考虑时空特征来预测供需差距，提出了三个基于六边形的卷积神经网络，他们将城市区域划分为多个正六边形格子，神经网络的输入和输出是六边形的邻域映射而成的矩阵或张量。相比于基于区域的需求预测，基于 OD 的需求预测会更加复杂，这是因为不同 OD 对之间的需求会存在复杂的时空依赖关系。Zhang 等人^[10]采用贝叶斯方法，基于每个用户的出行历史来预测他每次打开网约车平台时的目的地的概率分布。Ke 等人^[11]利用邻接矩阵来表征不同 OD 对之间的地理和语义相关性，继续将深度学习模型用于预测各 OD 对间的打车需求，但是他们忽略了外部因素对该邻接矩阵的影响。Li 等人^[12]提出的模型弥补了这个不足，该模型不仅可以捕捉 OD 对之间的内部相关性，还可以刻画外部条件对 OD 矩阵的影响。

通过对未来需求进行准确预测，平台可以更加有效地进行各种决策，从而提高整个网约车系统的运营效率和用户体验。Miao 等人^[13]提出了一种框架，将当前需求、未来的预期需求、车辆位置和车辆使用信息结合起来进行出租车的调度优化，以达到平衡供需和最小化空车行驶距离的目的。Xu 等人^[14]对每个司机 - 订单匹配对的价值进行评估，同时考虑即时的收益和基于历史数据估计的未来收益，使用组合优化算法对车辆进行调度。Kontou 等人^[15]采用深度学习方法对未来需求进行预测，并提出了一种启发式方法用于空车的调度和司机 - 乘客的匹配，以最小化空车的行驶里程。近年来，也有一些“预测 + 优化”的理论方法论被提出。例如，Elmachtoub 和 Grigas^[16]讨论了如何利

用优化问题的结构来设计预测模型，从而使得模型可以更好地结合这两个紧密相关的步骤。Mandi 等人^[17]在此基础上特别针对组合优化问题对该方法作出了新的改进。

然而，在网约车的实际场景中，平台的决策是续贯进行的，一个时段的决策可能会对下一时段整个系统的供需分布产生影响，因此单步最优并不能保证全局最优。为了实现全局利润的最大化，一些学者采用了强化学习方法，以学习每个状态下的最佳策略。Gao 等人^[18]使用强化学习为单个出租车司机确定最佳的空车行驶、接客或等待决策，用以平衡出租车的供需关系，并最大化出租车司机的利润。该研究将这个序贯决策问题建模为一个马尔可夫决策过程，并使用 Q-学习算法来求得最优决策。针对大规模车队的空车调度问题，Lin 等人^[19]提出了一个包含多智能体的深度强化学习模型。他们通过合理设计智能体、奖励函数和状态表示，开发出两种有效算法进行学习，可以有效减少空车调度的总里程。与 Lin 等人^[19]将研究区域划分成若干个六边形区域不同，Yu 和 Hu^[20]以及 Liang 等人^[21]考虑了在真实路网结构上的空车调度决策。Mao 等人^[22]在研究中探索了一种基于策略而非基于模型的深度强化学习方法，用于解决出租车的调度问题。对比前者研究，Zhu 等人^[23]松弛了平台完全控制司机的假设，并假设司机机会采取一些策略最大化他们的个人收入。他们将这个问题建模为一个均场马尔可夫决策过程，并开发了一种强化学习算法，模拟司机的决策过程并对平台的补贴策略进行优化。

除了车辆调度，学者们也探索了强化学习在其他决策问题方面的应用。Yu 等人^[24-25]研究了单个空车的路径规划问题，将其建模为一个马尔可夫决策过程，并分别提出了动态规划^[24]和强化学习^[25]两种方法来进行求解。Ke 等人^[26]提出了一个基于组合优化和多智能体深度强化学习方法的网约车匹配算法。该算法可以通过动态决定每个乘客订单请求的延迟时间，用来在网约车平台的匹配池中积累更多的闲置司机和等待乘客，实现更加有效的双向匹配。为了解决网约车平台中的供需异质性、动态性和不平衡性导致的复杂空间-时间定价问题，Chen 等人^[27]提出了一种强化学习增强的智能体建模和仿真系统，并使用近端策略优化算法确定最优的定价策略。

一些学者将网约车平台中需求到达、车辆移动等活动建模为一个排队网络。Iglesias 等人^[28]建立了一个闭合排队网络模型，用于解决有容量限制的道路网络中自动驾驶车辆的路径规划和空车调度问题。他们将该系统纳入闭合的多类 BCMP 网络的框架中，综合考虑了乘客随机到达、车辆路由、道路拥堵效应和电动汽车的充放电策略，提出一种方法对车辆路由和充电策略进行优化，并能够在车队规模趋于无穷时拥有优化效果的理论保证。Iglesias 等人^[28]的模型依赖于系统中充足的车辆供应。Braverman 等人^[29]同样建立了一个闭合排队网络模型，研究了排队网络在需求和供给一起趋向于无穷时的极限。他们利用该极限求解最优车辆路由策略，并证明了得到的最优路由策略在极限情况下的效用是有限系统中任何路由策略效用的上界。

1.2.2 动态拼车系统运营

由于动态拼车服务具有更大的灵活性，乘客可以在从起点到终点的路途中随时进行拼车，这增加了系统的复杂性，使得预测、决策和建模等问题更加困难。

为了验证动态拼车服务的发展潜力，一些学者在不同的城市路网上利用或随机生成订单数据进行实验和分析。Santi 等人^[30]以 2011 年美国纽约的 1.7 亿个出租车订单数据为基础进行了研究，结果表明，如果所有出租车乘客都愿意选择动态拼车服务，则几乎所有的出租车乘客都可以与其他人

共享行程，且延误时间不会超过两分钟。在此基础上，Vazifeh 等人^[31]进一步讨论了如何确定最佳的车队规模，以便为所有行程提供服务且不会给乘客带来延误。Fagnant 和 Kockelman^[32]在美国奥斯汀基于出行需求调查生成了订单数据，通过仿真程序表明，动态拼车可以减少乘客的平均服务时间和旅行成本，同时可以减少空车行驶里程占总里程的比例，从而有望能够缓解交通拥堵问题。

对动态拼车平台的决策而言，需要的预测信息不仅局限于需求和供给，还需要乘客从起点到终点的过程中的匹配成功率、预期绕行/共乘里程等关键指标。然而，目前文献中的相关内容较少，仅有 Wang 等人^[5]最近的工作对这些关键指标进行了预测。他们提出了一个数学模型用以预测在系统稳定状态下动态拼车服务中每个订单的匹配概率、预期绕行/共乘里程，并在人工生成的网格网络和中国海口的道路网络上进行了验证，数值和仿真实验表明该方法可以在不同情境下达到较高的准确率。但是，他们假设如果一个订单在其起点无法被平台匹配成功，平台将会立即指派一辆空车给该订单，且空车的接驾时间是固定的。这个假设忽略了车辆供给的动态性，也没有考虑随着车辆的移动，供给在不同空间产生的异质性，因此可能导致预测结果与实际情况存在偏差。

目前关于动态拼车中平台决策的研究，大多集中在改进车辆的实时调度策略。然而，由于缺乏准确的预测信息，大部分研究都是基于当前路网中的已知信息进行的决策。一些学者^[33-36]采用启发式方法，将新订单临时插入到附近车辆的任务列表中，检查每个插入导致的接驾里程、绕行里程、里程节省和/或利润增加，并选择能够产生最令人满意的结果的车辆匹配给新订单。另一些学者^[37-40]则将车辆调度问题建模为整数规划问题，并在滚动时间窗的框架中求解这个整数规划问题。然而，这些调度策略都是短视的，只能在当前时间阶段里最大化每个调度的即时收益，而没有考虑到未来的匹配机会。近年来，一些研究专注于设计具有前瞻性的车辆调度策略。这些研究通常将车辆调度问题建模为一个马尔科夫决策过程，并基于近似的价值函数来推导每个决策阶段的最佳车辆-乘客匹配。其中，Yu 和 Shen^[41]采用了一个线性的近似价值函数，并根据每个匹配问题的对偶值来更新近似价值函数的参数。为了减小问题维度，他们进一步将时间和空间区域划分为子时段和子区域，以减少求解时间。Shah 等人^[42]采用神经网络得到近似价值函数，并使用梯度下降法来更新网络参数。然而，这两种方法都需要依靠大量的仿真来进行学习，收敛性不能得到保证，学习到的价值函数也不具有可解释性，且应对环境变化时不够稳健。

一些学者也利用排队论的方法研究特定策略对整个动态拼车系统的影响，并在此基础上对策略进行优化。Daganzo 和 Ouyang^[43]提出了一个通用的排队网络模型，用于分析常见网约车平台的服务，包括动态拼车服务。他们假设这些服务在一个具有均匀需求和供给的正方形区域内运营，通过比较强的假设获得了显式解。该模型可以帮助平台运营者了解服务质量和其他因素之间的关系，从而做出战略层面的决策。Daganzo 等人^[44]在此基础上考虑了在拼车服务中乘客的最大绕行距离和最长等待时间，得到了均匀正方形区域内乘客的拼车成功率、预期共乘/绕行里程显式预测。他们将这些预测整合到排队网络模型中，并描述了这两个匹配条件对平均乘客出行时间和所需车队规模的影响。最近，Liu 和 Ouyang^[45]进一步扩展了这项工作，将整个城市划分为几个正方形区域，并考虑了这些区域间动态拼车需求的异质性。他们将许多规划决策（包括车队规模、车辆路径和空车调度）结合到一个统一的排队网络模型中，并提供了一种有效的方法来优化这些决策，以提高这个排队网络在稳定状态下的性能。但是，一方面，他们的研究是基于区域的，不能考虑实际路网中的真实情况；另一方面，他们的排队模型中的状态仅记录了车辆的当前所在区域和乘客的目标区域，因此仍然很难针对不同的 OD 对预测我们关心的指标并做出相应的定价和派单决策。

1.2.3 研究现状总结

通过对现有研究的综述，我们发现，出于动态拼车系统的复杂性和不确定性，如何事前评估和预测整个系统乃至每个订单的关键指标已受到国内外一些学者的关注，并取得了最新的研究进展。这些工作可以帮助平台优化其服务的战术规划和运营决策，具有十分深远的实际意义。然而，现有的研究还存在一些不足之处：

1. Daganzo 和 Ouyang^[43-44] 的模型基于一个空间匀质区域，假设被研究的区域里需求和供给都是相同的；但实际场景中，不同区域的需求和供给必然不同。他们的研究具有重要的理论意义，但很难在实际应用中帮助动态拼车平台作出战术和运营层面的决策。
2. Liu 和 Ouyang^[45] 进一步拓展了他们的研究，在模型中纳入了多个区域，且这些区域具有异质的供给和需求。但是，他们的模型不能考虑实际路网中的很多特殊情况，如区域和区域间的连通性；他们建立的排队网络模型中，不同 OD 对间的订单可能处于相同的状态，因此很难预测不同 OD 对间订单的各项指标并针对每个 OD 对做出差异化的决策，也无法考虑不同 OD 对间的订单在匹配时的竞争关系。
3. Wang 等人^[5] 的模型可以预测不同 OD 对间订单的各项指标，但是他们在模型中忽略了空车供给的动态性，即空车的数量随时间的推移而发生变化。因此，一方面，该模型很难被用于分析空车供给或车队规模对整个系统的效率产生的影响；另一方面，该模型得到的预测结果也可能与实际情况存在偏差。

因此，我们有必要进一步考虑空车供给的动态性和异质性，研究为整个动态拼车系统和不同 OD 对间订单预测各种关键指标的模型和方法，从而为平台进行决策提供更加准确可靠的支持。

1.3 研究思路与内容

本文的研究思路如图 1.2 所示。在模型构建部分，本文考虑空车供给的动态性和异质性，依次对订单/空车的排队队列、订单与订单间的匹配过程进行建模，最终可以通过求解该数学模型获得在系统稳定状态下整个系统和每个 OD 对间订单的诸多关键指标。在模型实验部分，本文分别通过求解数学模型和进行离散事件仿真获得这些指标，并将前后两者得到的结果进行比较来验证模型的准确性；在模型能够准确刻画动态拼车系统的基础上，本文进一步探究了不同空车供给率、不同平台规模和不同网约车模式对系统效率及效益的影响。

根据本文的研究思路，确定本文的组织框架如下：

第一章：阐述了本文的研究背景和研究意义；综述了有关网约车和动态拼车平台运营管理的相关研究并分析了研究现状与不足；阐明了本文的研究思路、研究内容和组织框架。

第二章：介绍了动态拼车的过程，引入了本文模型中的基本假设，定义了模型构建需要的符号与集合。

第三章：构建了动态拼车系统的模型刻画订单与空车的到达、排队以及订单与订单之间的匹配，通过模型为每个 OD 对间的订单计算了匹配成功率、预期共乘/绕行里程和预期等待时长等指标，为整个系统计算了平均拼车成功率、平均订单等待时长、单位时间平均车辆行驶里程、平均空车占用率和平均车辆数量等指标。

第四章：针对不同算例，比较了数学模型的结果和离散事件仿真得到的结果，验证了模型的准确性；针对模型中多种参数的变化进行了灵敏度分析，进一步证明了我们的模型与实际相符，并得出了关于网约车平台运营的一般管理启示。

第五章：整理本论文的主要研究结论，探讨未来可能的研究方向。

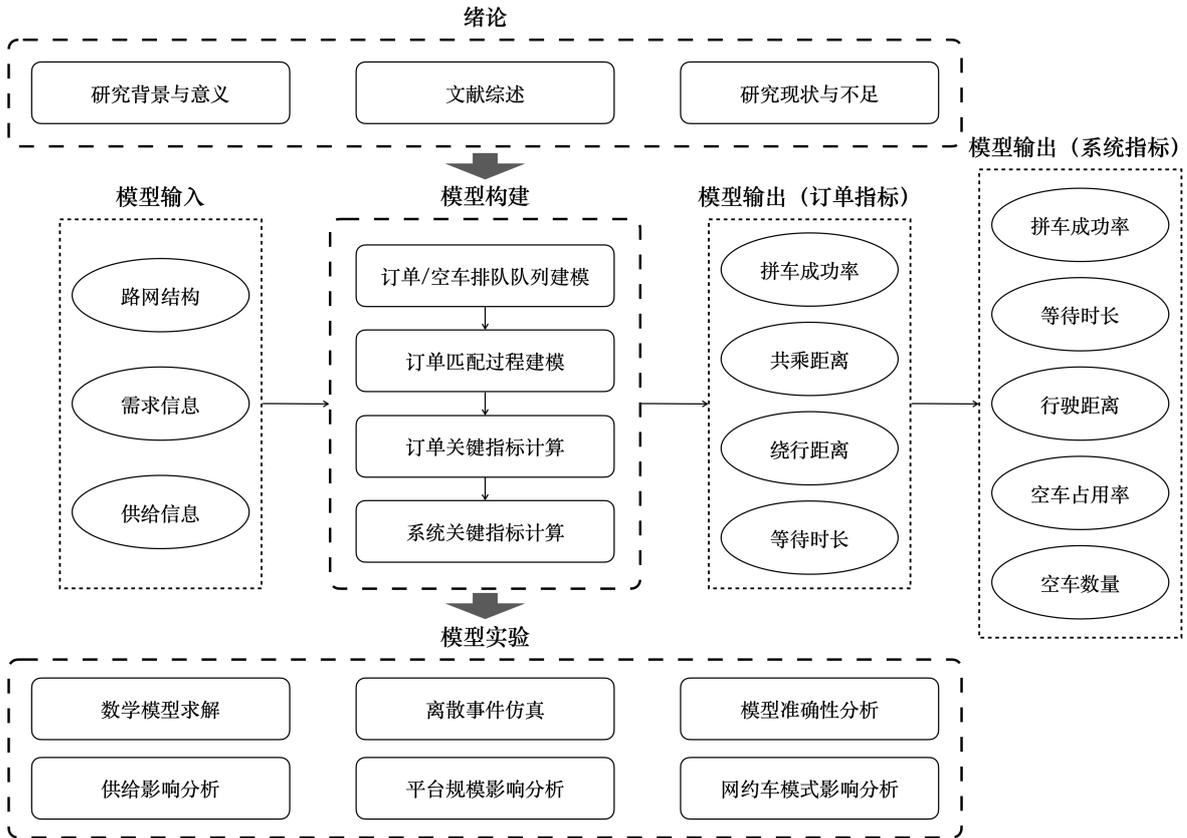


图 1.2: 本文的研究思路图

2 场景设定

2.1 动态拼车过程描述

本文考虑一个基于一般路网 $G(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ 运营的动态拼车系统，其中 \mathbf{N} 是路网中节点（一般代表着交叉口）的集合， \mathbf{A} 是路网中路段的集合。本文假设在每个研究时期内道路的交通状况稳定，因此每条路段 $a \in \mathbf{A}$ 上的通行时间是一个常数，表示为 t_a 。所有拼车乘客都通过网约车平台提交其行程请求，并将具有拼车需求的 OD 对集合表示为 \mathbf{W} 。对于每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ ，我们假设拼车订单的到达遵循泊松过程，且在每个研究时期内，订单的平均到达率恒为 λ_w 。不失一般性地，本文假设每个订单只包含一个乘客。此外，为了简化模型，我们假设每个拼车订单在整个行程中最多与另一个订单共享车辆空间。本文所说的匹配发生在被部分占用的车辆（即车上有一名乘客）和未被指派车辆的乘客之间，且只有当下列两个匹配条件都满足时，两者才会被认为匹配成功：

1. 未被指派车辆的乘客和车辆之间的距离不超过 \bar{R} ：此条件保证了乘客等待接驾的时间不会太长。
2. 拼车导致的绕行距离不超过最大绕行长度 \bar{D} ：此条件保证了额外的旅行时间不会太长，这对未被指派车辆的乘客和被部分占用的车辆上的乘客都是如此。

在接收到 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的订单后，平台首先会检查附近是否有被部分占用的车辆可以为其服务。平台帮助寻找车辆的订单被称为寻车者，我们也称，此时该订单处于寻车者状态；可以接载寻车者的、被部分占用的车辆上的订单被称为接载者，也称该订单处于接载者状态。寻车者状态是一个瞬时状态：如果寻车者附近有符合匹配条件的接载者，则两个订单均匹配成功，并退出我们观察系统；反之，寻车者订单立即进入下一状态。在后者的情形下，Wang 等人^[5]假定平台会立即派遣一辆空车为寻车者提供服务，寻车者进入接载者状态，等待被空车接驾的同时可以与其他寻车者进行匹配；对于 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的乘客，空车的接驾时间被假设为一个常数，表示为 \bar{t}_w^k 。然而，在本研究中，为了考虑空车供给的动态性，我们假设服务每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的空车的到达也遵循泊松过程，并且在每个研究时期内该泊松过程的平均到达率恒定为 μ_w 。因此，在本研究中，如果寻车者没有找到匹配的接载者，平台会首先检查是否有可以服务该 OD 对的空车，如果有，则由该空车接驾；如果没有，则该寻车者进入一个排队等待的队列中，我们称其为排队者、处于排队者状态。

当空车到达时，如果队列中有排队者，则该空车会被指派给队列中先到达的排队者；当队列中有超过一个排队者时，该空车会一次性接驾队列中两个排队者，且也会退出我们的观察系统；如果队列中没有乘客，则该空车也会在此排队等待。为了简化模型，我们还假设当空车队列中有 V 辆车时，新到达的空车就不会排队，而是退出系统。

在被其他乘客匹配前，同一 OD 对间的、被空车单独接驾的乘客会沿着相同的路径前进。设 $\mathbf{A}_w = \{a_w^1, a_w^2, \dots, a_w^{|\mathbf{A}_w|}\}$ 为 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间路径上的路段集合，其中 a_w^i 表示路径上的第 i 个路段。被部分占用的车辆在进入其路径上的每一个路段之前（包括从寻车者状态或排队者状态退出进入第一个路段），平台也会检索他附近是否有正在等待被指派车辆的排队者。此时，我们称这个车辆上的订单处于寻人者状态，该状态也是一个瞬时状态：如果寻人者附近有符合匹配条件的排队者，则两个订单均匹配成功，并退出我们观察系统；反之，寻人者订单进入下一路段，在路段行驶时，该订单可以被寻车者检索和匹配，即该订单立即从寻人者状态进入了接载者状态。

总的来说，在本研究的模型中，订单间的匹配可能发生在：1) 寻车者状态和接载者状态的订单之间，2) 寻车者状态和排队者状态的订单之间。如果在一次检索中寻车者（寻人者）找到了多个可以匹配的接载者（排队者），则平台会选择效用最大的接载者（排队者）进行匹配，例如，拥有最短接驾时间或最长共乘距离的接载者（排队者）。对于任何订单而言，一旦他被匹配，就退出了我们考察的系统。

2.2 基本符号定义

令 $s(w)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的寻车者状态， $t(a, w)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间、路段 $a \in \mathbf{A}_w$ 上的接载者状态； $q(w)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的排队者状态， $o(a, w)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间、进入路段 $a \in \mathbf{A}_w$ 前的寻人者状态。对于每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ ，都有一组接载者状态 $\mathbf{T}_w = \{t(a, w), a \in \mathbf{A}_w\}$ 和一组寻人者状态 $\mathbf{O}_w = \{o(a, w), a \in \mathbf{A}_w\}$ 。令 $\mathbf{S} = \{s(w), w \in \mathbf{W}\}$ 表示寻车者状态的集合， $\mathbf{T} = \bigcup_{w \in \mathbf{W}} \mathbf{T}_w$ 表示接载者状态的集合， $\mathbf{Q} = \{q(w), w \in \mathbf{W}\}$ 表示排队者状态的集合， $\mathbf{O} = \bigcup_{w \in \mathbf{W}} \mathbf{O}_w$ 表示寻人者状态的集合。一个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的订单的状态转换全过程如图 2.1 所示。

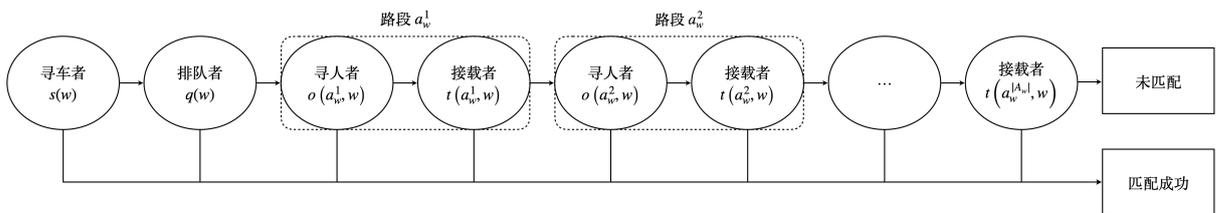


图 2.1: 订单的状态转换全过程图

设 $m_{a,\omega}^w = \langle s(w), t(a, \omega) \rangle$ 表示由寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 和接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 组成的寻车者 - 接载者匹配对， $c_{a,\omega}^w = \langle q(w), o(a, \omega) \rangle$ 表示由排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 和寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}$ 组成的排队者 - 寻人者匹配对。根据第 2.1 节中描述的匹配条件，我们可以通过检查每个匹配对的接驾距离和绕行距离来确定所有可以匹配的接载者 - 寻车者匹配对和排队者 - 寻人者匹配对。

令 $l(i, j)$ 表示路网 $G(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ 上节点 $i \in \mathbf{A}$ 和节点 $j \in \mathbf{A}$ 之间的最短距离， n_a 表示路段 $a \in \mathbf{A}$ 的中间点， o_w 与 d_w 分别表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的起点和终点。对于一个寻车者 - 接载者匹配对 $m_{a,\omega}^w = \langle s(w), t(a, \omega) \rangle$ ，我们通过以下方式近似计算接驾距离：

$$l^{\text{pk}}(m_{a,\omega}^w) = l(n_a, o_w) \quad (2.1)$$

对于每个寻车者 - 接载者匹配对，如图 2.2 所示，有两种方式可以将两个订单的行程组合成一次拼车行程：先上先下（First-On-First-Off, FOFO）和先上后下（First-On-Last-Off, FOLO）。车辆将首先接载寻车者，但在 FOFO 方式下会先将接载者送到目的地，然后再送寻车者；在 FOLO 方式下会先将寻车者送到目的地，然后再送接载者。分别用 $L_{\text{psg}}^{\text{FOFO}}(m_{a,\omega}^w)$ 和 $L_{\text{veh}}^{\text{FOFO}}(m_{a,\omega}^w)$ ($L_{\text{psg}}^{\text{FOLO}}(m_{a,\omega}^w)$ 和 $L_{\text{veh}}^{\text{FOLO}}(m_{a,\omega}^w)$) 表示在 FOFO (FOLO) 方式下，匹配 $m_{a,\omega}^w$ 的拼车行程中寻车者和接载者的行程距离。

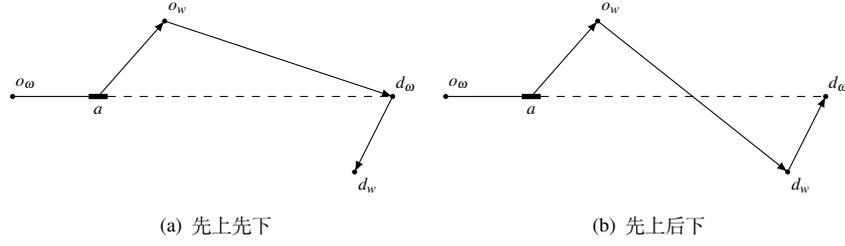


图 2.2: 将两个订单的行程组合成一次拼车行程的两种方式

从图 2.2 中可以近似计算出 $L_{psg}^{FOFO}(m_{a,\omega}^w)$ 、 $L_{veh}^{FOFO}(m_{a,\omega}^w)$ 、 $L_{psg}^{FOLO}(m_{a,\omega}^w)$ 和 $L_{veh}^{FOLO}(m_{a,\omega}^w)$:

$$L_{veh}^{FOFO}(m_{a,\omega}^w) = l(o_\omega, n_a) + l(n_a, o_w) + l(o_w, d_\omega) \quad (2.2)$$

$$L_{psg}^{FOFO}(m_{a,\omega}^w) = l(o_w, d_\omega) + l(d_\omega, d_w) \quad (2.3)$$

$$L_{veh}^{FOLO}(m_{a,\omega}^w) = l(o_\omega, n_a) + l(n_a, o_w) + l(o_w, d_w) + l(d_w, d_\omega) \quad (2.4)$$

$$L_{psg}^{FOLO}(m_{a,\omega}^w) = l(o_w, d_w) \quad (2.5)$$

令 L_w^0 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间始终被一辆车单独服务的订单的行程距离。如果匹配 $m_{a,\omega}^w$ 的拼车行程采用 FOFO (FOLO) 方式, 那么寻车者和接载者的绕行距离分别为 $L_{psg}^{FOFO} - L_w^0$ ($L_{psg}^{FOLO} - L_w^0$) 和 $L_{veh}^{FOFO} - L_\omega^0$ ($L_{veh}^{FOLO} - L_\omega^0$)。假设平台将选择绕行距离较小的方式, 且在每种方式中, 绕行距离被计算为两名乘客的绕行距离中的较大值。因此, 寻车者状态 $s(w), w \in \mathbf{W}$ 和接载者状态 $t(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$ 之间的绕行距离计算为:

$$l^{dt}(m_{a,\omega}^w) = \min \left\{ \begin{array}{l} \max \{ L_{psg}^{FOFO} - L_w^0, L_{veh}^{FOFO} - L_\omega^0 \}, \\ \max \{ L_{psg}^{FOLO} - L_w^0, L_{veh}^{FOLO} - L_\omega^0 \} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

根据式 (2.1) 和式 (2.6), 可以得到由满足条件 1 和 2 的所有寻车者 - 接载者状态匹配对组成的集合, 记为 \mathbf{M}_{st} :

$$\mathbf{M}_{st} = \left\{ m_{a,\omega}^w \left| \begin{array}{l} m_{a,\omega}^w = \langle s(w), t(a, \omega) \rangle \\ l^{pk}(m_{a,\omega}^w) \leq \bar{R} \\ l^{dt}(m_{a,\omega}^w) \leq \bar{D} \end{array} \right. , w \in \mathbf{W}, a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W} \right\} \quad (2.7)$$

对于每个寻车者状态 $s(w), w \in \mathbf{W}$ (接载者状态 $t(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$), 令 $\mathbf{T}_{s(w)}$ ($\mathbf{S}_{t(a,\omega)}$) 表示 $s(w)$ 匹配的接载者状态集合 ($t(a, \omega)$ 匹配的寻车者状态集合), 即:

$$\mathbf{T}_{s(w)} = \{ t(a, \omega) | \langle s(w), t(a, \omega) \rangle \in \mathbf{M}_{st} \} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}_{t(a,\omega)} = \{ s(w) | \langle s(w), t(a, \omega) \rangle \in \mathbf{M}_{st} \} \quad (2.9)$$

此外, 由于一个寻车者状态 $s(w), w \in \mathbf{W}$ 可能对应多个匹配的接载者状态, 我们假设它们有预定义的优先级。令 $u_{st}(m_{a,\omega}^w)$ 表示匹配 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 的效用, 可以根据匹配得到的拼车行程的距离节省、绕行距离和/或接驾距离进行预定义。对于每个寻车者状态, 平台对所有与其匹配的接载者状

态，根据每个匹配的效用进行优先级排序。记 $\mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)}$, $w \in \mathbf{W}, t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 为那些与状态 $s(w)$ 匹配的、比 $t(a, \omega)$ 匹配效用更高的接载者状态集合，即，

$$\mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)} = \{t(a', \omega') \mid u_{st}(m_{a',\omega'}^w) > u_{st}(m_{a,\omega}^w), t(a', \omega') \in \mathbf{T}_{s(w)}\} \quad (2.10)$$

类似地，令 \mathbf{C}_{qo} 表示所有符合匹配条件的排队者 - 寻人者状态匹配对的集合，对于每个排队者状态 $q(w), w \in \mathbf{W}$ （寻人者状态 $o(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$ ），令 $\mathbf{O}_{q(w)}$ ($\mathbf{Q}_{t(a,\omega)}$) 表示 $q(w)$ 匹配的寻人者状态集合 ($o(a, \omega)$ 匹配的排队者状态集合)，即：

$$\mathbf{O}_{q(w)} = \{o(a, \omega) \mid \langle q(w), o(a, \omega) \rangle \in \mathbf{C}_{qo}\} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}_{o(a,\omega)} = \{q(w) \mid \langle q(w), o(a, \omega) \rangle \in \mathbf{C}_{qo}\} \quad (2.12)$$

令 $u_{qo}(c_{a,\omega}^w)$ 表示匹配 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 的效用，对于每个寻人者状态，平台对所有与其匹配的排队者状态，根据每个匹配的效用进行优先级排序。记 $\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}^{>q(w)}$, $o(a, \omega) \in \mathbf{O}, q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ 为那些与状态 $o(a, \omega)$ 匹配的、比 $q(w)$ 匹配效用更高的排队者状态集合，即，

$$\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}^{>q(w)} = \{q(w') \mid u_{qo}(c_{a,\omega}^{w'}) > u_{qo}(c_{a,\omega}^w), q(w') \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}\} \quad (2.13)$$

由于寻车者和接载者的匹配与排队者和寻人者的匹配需要满足相同的匹配条件，因此， $\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ ($\mathbf{O}_{q(w)}$) 可以根据 $\mathbf{S}_{t(a,\omega)}$ ($\mathbf{T}_{s(w)}$) 来定义：

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{o(a,\omega)} = \{q(w) \mid s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}\} \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mathbf{O}}_{q(w)} = \{o(a, \omega) \mid t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}\} \quad (2.15)$$

但是，考虑到第 2.1 节中描述的动态拼车的实际过程，实际 $\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ ($\mathbf{O}_{q(w)}$) 的定义与上式中的 $\tilde{\mathbf{Q}}_{o(a,\omega)}$ ($\tilde{\mathbf{O}}_{q(w)}$) 略有不同。

第一， $s(w), w \in \mathbf{W}$ 可能会和属于同一 OD 对 $\omega, \omega \in \mathbf{W}$ 的多个接载者状态匹配，这些接载者状态对应着 OD 对 ω 间路径上的连续路段 $a_\omega^i, a_\omega^{i+1}, \dots, a_\omega^{i+j}$ ，即，

$$\mathbf{T}_{s(w)}^\omega = \{t(a_\omega^n, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)} \mid n \in [i, i+j] \subset [1, |\mathbf{A}_\omega|], \omega \in \mathbf{W}\} \quad (2.16)$$

当 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的订单从寻车者状态 $s(w)$ 进入排队者状态 $q(w)$ 时，不可能有订单处于集合 $\mathbf{T}_{s(w)}^\omega$ 中的接载者状态上，否则，该订单就会与处于寻车者状态 $s(w)$ 的订单匹配。从寻车者状态 $s(w)$ 进入排队者状态 $q(w)$ 后，订单不会与寻人者状态 $o(a_\omega^{i+1}, \omega), o(a_\omega^{i+2}, \omega), \dots, o(a_\omega^{i+j}, \omega)$ 匹配，因为处于这些状态的订单一定是从集合 $\mathbf{T}_{s(w)}^\omega$ 中的接载者状态转换而来的。因此，对于 OD 对 ω 之间的寻人者状态，处于 $q(w)$ 状态的订单只可能和处于 $o(a_\omega^i, \omega)$ 这一个寻人者状态的订单发生匹配。

第二， $s(w), w \in \mathbf{W}$ 可能会和属于自身 OD 对的接载者状态匹配。但是，排队者状态 $q(w), w \in \mathbf{W}$ 的订单不会与寻人者状态 $o(a_\omega^1, w)$ 的订单发生匹配。当订单处于寻人者状态 $o(a_\omega^1, w)$ 时，OD 对 w 起点的订单/空车队列中不会有订单，否则，用于接驾进入寻人者状态 $o(a_\omega^1, w)$ 的订单的车辆会直接

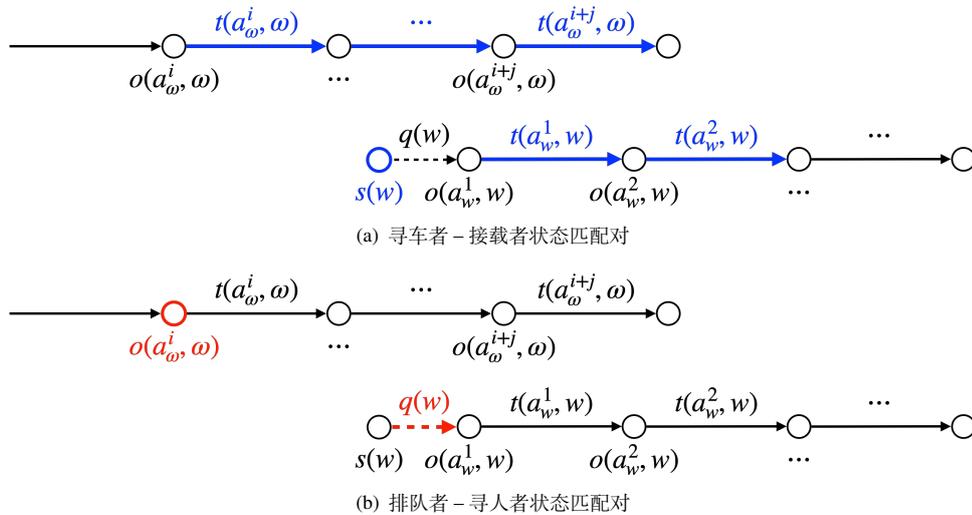


图 2.3: 寻车者 - 接载者状态匹配对和排队者 - 寻人者状态匹配对差异

接载两个订单，并退出我们的观察系统。

举例而言，图 2.3 为 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 和 OD 对 $\omega \in \mathbf{W}$ 间状态的匹配关系示意图。图 2.3(a) 中蓝色部分是寻车者状态和接载者状态的匹配，图 2.3(b) 中红色部分是排队者状态和寻人者状态的匹配。其中， $s(w)$ 可以和 $t(a_\omega^i, \omega)$ 至 $t(a_\omega^{i+j}, \omega)$ 匹配，而 $q(w)$ 只能和 $o(a_\omega^i, \omega)$ 发生匹配； $s(w)$ 可以和自己 OD 对间的搭载者状态（即图中的 $t(a_w^1, w)$ 至 $t(a_w^2, w)$ ）匹配，而 $q(w)$ 不与自己 OD 对间的寻人者状态发生匹配。

综上所述，集合 $\mathbf{O}_{q(w)}$ 的定义如下：

$$\mathbf{O}_{q(w)} = \left\{ o(a_\omega^n, \omega) \left| \begin{array}{l} t(a_\omega^n, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)} \\ t(a_\omega^{n-i}, \omega) \notin \mathbf{T}_{s(w)}, \forall i \in [1, n-1] \\ n \in [1, |\mathbf{A}_\omega|], \omega \in \mathbf{W} \setminus \{w\} \end{array} \right. \right\} \quad (2.17)$$

在此基础上，我们定义集合 \mathbf{C}_{qo} ：

$$\mathbf{C}_{qo} = \{ \langle q(w), o(a, \omega) \rangle \mid o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}, a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}, w \in \mathbf{W} \} \quad (2.18)$$

并根据式(2.11)和(2.13)分别得到集合 $\mathbf{O}_{q(w)}$ 和 $\mathbf{Q}_{o(a, \omega)}^{>q(w)}$ 。

2.3 本章小结

本章介绍了本研究的基本假设，详细描述了动态拼车的过程，并定义了订单的四种状态：寻车者状态、排队者状态、寻人者状态和接载者状态。在订单匹配之前，订单处于这四种状态之一。本章还定义了模型中的基本符号，包括将四种状态形式化，并定义状态之间的匹配关系。这种匹配关系的形式化为后续分析动态拼车系统中变量之间复杂关系的打下了基础。为了方便读者阅读，本文常用的符号及其含义可在附录 A 中查询。

3 模型构建

3.1 订单/空车排队过程建模

当 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的订单按均值为 λ_w 的泊松过程到达时，订单进入寻车者状态 $s(w)$ 后，有一定概率会和处于接载者状态的订单匹配。设 $p_{s(w)}$ 表示在状态 $s(w)$ 的寻车者呼叫服务后被匹配的概率，因此，平均有 $(1 - p_{s(w)})$ 比例的订单无法在寻车者状态 $s(w)$ 发生匹配，进而进入订单/空车排队队列（即进入排队者状态 $q(w)$ ），等待平台安排车辆接驾。在该队列中，空车按均值为 μ_w 的泊松过程到达；另外，记来自其他 OD 对间的寻人者状态的匹配机会到达率为 $\zeta_{q(w)}$ 。在排队者状态 $q(w)$ 等待的订单可能会由空车接驾或被处于寻人者状态的其他订单检索和匹配。

每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 起点处的订单/空车的排队队列可以被建模为一个马尔可夫链。该马尔可夫链的状态集合，记为 $\mathcal{S}_{q(w)}$ ，可以表示为：

$$\mathcal{S}_{q(w)} = \{(i, j) | i \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Z}, j \in [0, V] \cap \mathbb{Z}, i \cdot j = 0\} \quad (3.1)$$

其中，状态 $(i, 0)$ 表示有 i 个订单正在队列中等待车辆接驾；状态 $(0, j)$ 表示有 j 辆空车正在队列中等待订单到来，队列中最多有 V 辆车在等待；状态 $(0, 0)$ 表示队列中既没有订单也没有空车在等待。例如，当 $V = 3$ 时，每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 起点处的订单/空车排队队列建模成的马尔可夫链如图3.1所示，其中紫色圆圈代表着这条马尔可夫链的各个状态。

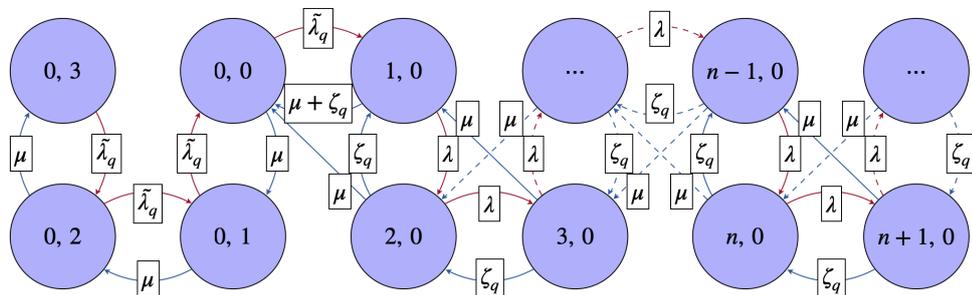


图 3.1: 每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 起点处的订单/空车排队的马尔可夫链模型

在该马尔可夫链中，状态和状态之间的转移包括六种情景。第一，订单到达且队列中有空车在等待，此时从状态 $(0, j)$ 转移至状态 $(0, j - 1)$ ，新到达的订单会被队列中的空车接驾。第二，订单到达且队列中没有空车在等待，此时从状态 $(i, 0)$ 转移至状态 $(i + 1, 0)$ ，新到达的订单会在队列中等待，直到有车来接驾。第三，空车到达且队列中有至少两个订单在等待，此时从状态 $(i, 0)$ 转移至状态 $(i - 2, 0)$ ，新到达的空车可以服务队列中的两个订单。第四，空车到达且队列中只有一个订单在等待，此时从状态 $(1, 0)$ 转移至状态 $(0, 0)$ ，新到达的空车服务队列中的这一个订单。第五，空车到达、队列中没有订单在等待且队列中等待的空车数量不超过 $V - 1$ ，此时从状态 $(0, j)$ 转移至状态 $(0, j + 1)$ ，新到达的空车会加入等待队列中。第六，该排队者状态 $q(w)$ 匹配的任一寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 上有被部分占用的车辆到达，且匹配效用比 $u_{qo}(c_{a,\omega}^w)$ 高的任一排队者状态 $q(\omega) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}^{>q(w)}$ 上没有订单在等候，此时从状态 $(i, 0)$ 转移至状态 $(i - 1, 0)$ ，在队列中排队的其中一个订单会与这个寻人者状态上的订单匹配。

在马尔可夫链中不同的状态下，我们认为空车的到达率以及来自与 $q(w)$ 匹配的所有寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 的匹配机会到达率固定不变，分别为 μ_w 和 $\zeta_{q(w)}$ 。但是，马尔可夫链的不同状态下订单的到达率一般不同：在状态 $(0, j), j \in [1, +\infty)$ 下，任何来自寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 的匹配机会都会和正在排队者状态 $q(w)$ 的订单匹配，因此接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 上不可能有未匹配的订单，OD 对 w 间新到达的订单在寻车者状态 $s(w)$ 不可能检索到可以匹配的接载者状态的订单，所以此时进入排队者状态的订单到达率为 λ_w ；在状态 $(i, 0), i \in [0, V]$ 下，OD 对 w 间新到达的订单有一定概率会在寻车者状态 $s(w)$ 被匹配，因此，记此时进入排队者状态的订单到达率为 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ ，应有 $\tilde{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w$ 。

$\zeta_{q(w)}$ 和 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 的计算方法将在第 3.2 节中给出。根据以上分析，我们用 $q_{ss'}$ 表示马尔可夫链中从状态 $s \in \mathcal{S}_{q(w)}$ 到状态 $s' \in \mathcal{S}_{q(w)}$ 的转移率，则有：

$$q_{ss'} = \begin{cases} \lambda_w, & s = (i, 0), s' = (i + 1, 0), i \in [1, +\infty) \\ \tilde{\lambda}_{q(w)}, & s = (0, j), s' = (0, j - 1), j \in [0, V] \\ \tilde{\lambda}_{q(w)}, & s = (0, 0), s' = (1, 0) \\ \mu_w, & s = (0, j), s' = (0, j + 1), j \in [0, V - 1] \\ \mu_w, & s = (i, 0), s' = (i - 2, 0), i \in [2, +\infty) \\ \zeta_{q(w)}, & s = (i, 0), s' = (i - 1, 0), i \in [1, +\infty) \\ \mu_w + \zeta_{q(w)}, & s = (1, 0), s' = (0, 0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2)$$

当 $V = 3$ 时，如图 3.1 所示，马尔可夫链中各状态间的转移率均标注在图上。由于以下的分析对每一个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的排队者状态 $q(w)$ 来说都是如此，因此，在这一节余下的分析中，我们将省略标志 OD 对的下标 w 。

在上述马尔可夫链中，每个状态的极限概率可以用 $P_s, s \in \mathcal{S}_q$ 表示。极限概率是指当考察时间趋于无穷、排队系统趋于稳定时，每个状态被访问的概率。在系统稳定时，马尔可夫链的每个状态都需要满足平衡方程。平衡方程描述了状态之间的动态平衡，即任何时刻进入某状态的速率必须等于离开该状态的速率。对于任意状态 $s \in \mathcal{S}_q$ ，其平衡方程可以表示为：

$$\lambda P_{(0,V)} = \mu P_{(0,V-1)} \quad (3.3)$$

$$(\tilde{\lambda}_q + \mu) P_{(0,j)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,j+1)} + \mu P_{(0,j-1)}, j \in [1, V - 1] \quad (3.4)$$

$$(\tilde{\lambda}_q + \mu) P_{(0,0)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,1)} + (\mu + \zeta_q) P_{(1,0)} + \mu P_{(2,0)} \quad (3.5)$$

$$(\lambda + \mu + \zeta_q) P_{(1,0)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,0)} + \zeta_q P_{(2,0)} + \mu P_{(3,0)} \quad (3.6)$$

$$(\lambda + \mu + \zeta_q) P_{(i,0)} = \lambda P_{(i-1,0)} + \zeta_q P_{(i+1,0)} + \mu P_{(i+2,0)}, i \in [2, +\infty) \quad (3.7)$$

根据平衡方程，可以推导每个状态的极限概率。定义

$$\rho_1 = \frac{\tilde{\lambda}_q}{\mu}, \rho_2 = \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{(\mu + \zeta_q)^2 + 4\mu\lambda} - (\mu + \zeta_q) \right) \quad (3.8)$$

可以得到命题3.1和命题3.2。

命题 3.1. 该排队系统稳定的条件是 $\rho_2 < 1$, 即 $\lambda < 2\mu + \zeta_q$.

命题 3.2. 该排队系统中状态 $s \in \mathcal{S}_q$ 的极限概率 P_s 为

$$P_s = \begin{cases} \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} \rho_2^{i-1} P_{(0,V)}, s = (i, 0), i = [1, +\infty) \\ \rho_1^{V-j} P_{(0,V)}, s = (0, j), j \in [0, V] \end{cases} \quad (3.9)$$

其中, 状态 $(0, V) \in \mathcal{S}_q$ 的极限概率 $P_{(0,V)}$ 为

$$P_{(0,V)} = 1 / \lim_{\tilde{\rho}_1 \rightarrow \rho_1} \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}}{1 - \tilde{\rho}_1} + \frac{\tilde{\rho}_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_2} \right) = \begin{cases} 1 / \left(\frac{1 - \rho_1^{V+1}}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_2} \right), & \rho_1 \neq 1 \\ 1 / \left((V+1) + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_2} \right), & \rho_1 = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

证明. 命题 3.1 和命题 3.2 的证明见附录 B。

根据极限概率，我们进而可以了解该排队系统在稳定状态下订单/空车的流量情况和等待情况。根据泊松到达观察时间平均 (PASTA) 定理，可以得到在稳定状态下，一辆空车新到达时有 V 辆其他空车正在等待的概率为 $P_{(0,V)}$ ，因此空车直接离开的速率 $\mu^{(-)}$ 为：

$$\mu^{(-)} = \mu P_{(0,V)} \quad (3.11)$$

剩余的空车都会接驾订单并离开，因此，繁忙的空车离开这个队列的速率 $\mu^{(+)}$ 为：

$$\mu^{(+)} = \mu - \mu^{(-)} = \mu (1 - P_{(0,V)}) \quad (3.12)$$

在繁忙的空车中，一部分会接驾两个订单离开，另一部分只会接驾一个订单离开。其中，接驾两个订单的空车离开的速率 $\mu^{(2)}$ 也可以根据 PASTA 定理进行计算，即：

$$\mu^{(2)} = \mu \sum_{i=2}^{+\infty} P_{(i,0)} = \mu \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} P_{(0,V)} \sum_{i=2}^{+\infty} \rho_2^{i-1} = \mu \cdot \frac{\rho_1^V \rho_2^2}{\frac{\lambda}{\lambda_q} (1 - \rho_2)} P_{(0,V)} \quad (3.13)$$

$\mu^{(+)}$ 中除去 $\mu^{(2)}$ 剩余的一部分即为接驾一个订单的空车离开的速率，记为 $\mu^{(1)}$ ，有：

$$\mu^{(1)} = \mu^{(+)} - \mu^{(2)} \quad (3.14)$$

对于订单而言，订单的平均到达速率 $\bar{\lambda}_q$ 可以通过对马尔可夫链中不同状态下的到达率求加权

平均值得到，即：

$$\bar{\lambda}_q = \tilde{\lambda}_q \sum_{j=0}^V P_{(0,j)} + \lambda \sum_{i=1}^{+\infty} P_{(i,0)} = \begin{cases} \tilde{\lambda}_q P_{(0,V)} \left(\frac{1-\rho_1^{V+1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_1/\rho_2} \cdot \frac{1}{1-\rho_2} \right), & \rho_1 \neq 1 \\ \tilde{\lambda}_q P_{(0,V)} \left(\frac{1}{V+1} + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_1/\rho_2} \cdot \frac{1}{1-\rho_2} \right), & \rho_1 = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

被一辆空车单独接驾的订单的流出速率，记为 $\lambda^{(1)}$ ，应该和只接驾一个订单的空车离开的速率相等，即：

$$\lambda^{(1)} = \mu^{(1)} \quad (3.16)$$

被服务自己 OD 对间订单的空车接驾、但是和另一个自己 OD 对间的订单共乘的订单流出速率，记为 $\lambda^{(2)}$ ，是接驾两个订单的空车离开的速率的两倍，即：

$$\lambda^{(2)} = 2\mu^{(2)} \quad (3.17)$$

剩余的其他订单会被服务其他 OD 对的、被部分占有的车辆接驾，即被寻车者检索到并匹配，这些订单离开系统的速率，记为 $\lambda^{(o)}$ ，可以用订单的平均到达速率减去被服务自己 OD 对间订单的空车接驾的订单速率求得，也就是：

$$\lambda^{(o)} = \bar{\lambda}_q - (\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}) = \bar{\lambda}_q - (\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)}) \quad (3.18)$$

最后，我们讨论空车（订单）排队的长度和平均等待时间。空车（订单）排队的长度 l_q^{veh} (l_q^{psg}) 通过对马尔可夫链中不同状态下的排队空车（订单）数按状态的极限概率进行加权平均得到：

$$l_q^{\text{veh}} = \sum_{j=1}^V j P_{(0,j)} = \sum_{j=1}^V j \rho_1^{V-j} P_{(0,V)} \quad (3.19)$$

$$l_q^{\text{psg}} = \sum_{i=1}^{+\infty} i P_{(i,0)} = \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} P_{(0,V)} \sum_{i=1}^{+\infty} i \rho_2^{i-1} = \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q}} P_{(0,V)} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \rho_2^i \right)' = \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_q} (1-\rho_2)^2} P_{(0,V)} \quad (3.20)$$

根据 Little 法则，进而可以得到订单在队列中的平均等待时长 τ_q ：

$$\tau_q = l_q^{\text{psg}} / \bar{\lambda} \quad (3.21)$$

3.2 订单匹配过程建模

在 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的订单出现时进入其寻车者状态 $s(w)$ ，如果寻车者状态 $s(w)$ 匹配的接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 中存在订单，这些订单未被匹配，因此可以和新进入寻车者状态 $s(w)$ 的订单匹配。因此，订单在寻车者状态 $s(w)$ 的匹配概率 $p_{s(w)}$ 取决于匹配的接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 中是否存在接载者。令 $\rho_{t(a, \omega)}$ 表示任何时刻接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 中至少有一个接载者的概率。因

此，对于处于寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 的订单，其匹配概率 $p_{s(w)}$ 满足：

$$p_{s(w)} = \begin{cases} 1 - \prod_{t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} (1 - \rho_{t(a,\omega)}), & \mathbf{T}_{s(w)} \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, s(w) \in \mathbf{S} \quad (3.22)$$

其中 $\prod_{t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} (1 - \rho_{t(a,\omega)})$ 是指在任何寻车者状态 $s(w)$ 匹配的接载者状态中都不存在订单可以匹配的概率。

对于处于接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 的订单，如果在其停留此状态期间有匹配的寻车者出现，那么他就会在此状态中被匹配。因此，订单在接载者状态 $t(a, \omega)$ 被匹配的概率，记为 $p_{t(a,\omega)}$ ，取决于其匹配的寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}$ 中订单的到达速率。此外，如第 2.2 节所述，对于每个寻车者，他们可以有多个匹配的接载者，并且他和这多个接载者之间具有不同的匹配优先级。当接载者 $t(a, \omega)$ 遇到一个处于寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}$ 的可以匹配的寻车者时，只有在没有拥有更高匹配优先级的接载者与该寻车者匹配时， $s(w)$ 上的寻车者才会与 $t(a, \omega)$ 匹配。因此，对于在状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 中的接载者，来自寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}$ 匹配机会的平均到达速率可以表示为：

$$\eta_{t(a,\omega)}^{s(w)} = \begin{cases} \lambda_w \prod_{t(a',\omega') \in \mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)}} (1 - \rho_{t(a',\omega')}), & \mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)} \neq \emptyset \\ \lambda_w, & \text{其他} \end{cases}, m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st} \quad (3.23)$$

其中 $\prod_{t(a',\omega') \in \mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)}} (1 - \rho_{t(a',\omega')})$ 是指没有拥有比 $t(a, \omega)$ 匹配优先级更高的接载者可以与在 $s(w)$ 中的寻车者匹配的概率。来自不同寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}$ 的匹配机会的独立泊松流会聚合到达接载者状态 $t(a, \omega)$ ，记聚合泊松流的平均速率为 $\eta_{t(a,\omega)}$ ，满足：

$$\eta_{t(a,\omega)} = \begin{cases} \sum_{s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}} \eta_{t(a,\omega)}^{s(w)}, & \mathbf{S}_{t(a,\omega)} \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, t(a, \omega) \in \mathbf{T} \quad (3.24)$$

则处于接载者状态 $t(a, \omega)$ 的订单被匹配的概率可以通过指数分布的性质表示为：

$$p_{t(a,\omega)} = 1 - \exp(-\eta_{t(a,\omega)} t_a), t(a, \omega) \in \mathbf{T} \quad (3.25)$$

在 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的订单进入每个寻人者状态 $o(a, \omega)$ 时，如果寻人者状态 $o(a, \omega)$ 匹配的排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ 中存在正在排队的订单，则可以和新进入寻人者状态 $o(a, \omega)$ 的订单匹配。因此，订单在寻人者状态 $o(a, \omega)$ 的匹配概率 $p_{o(a,\omega)}$ 取决于匹配的排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ 中是否存在排队者。令 $\rho_{q(w)}$ 表示排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ 中至少有一个订单在排队的概率。因此，对于处于寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}$ 的订单，其匹配概率 $p_{o(a,\omega)}$ 满足：

$$p_{o(a,\omega)} = \begin{cases} 1 - \prod_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}} (1 - \rho_{q(w)}), & \mathbf{Q}_{o(a,\omega)} \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, o(a, \omega) \in \mathbf{O} \quad (3.26)$$

其中 $\prod_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}} (1 - \rho_{q(w)})$ 是指在任何寻人者状态 $o(a, \omega)$ 匹配的排队者状态中都不存在订单可以匹配的概率。

对于处于排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的订单，如果在其排队时有匹配的寻人者出现，那么他就会在此状态中被匹配，具体的匹配过程在第 3.1 节中已进行详细地阐述。第 3.1 节未解决的问题之一是，对于排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ ，来自与他匹配的寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 的匹配机会到达率 $\zeta_{q(w)}$ 如何计算。同样，对于每个寻人者，他们可以有多个匹配的排队者，并且他和这多个排队者之间具有不同的匹配优先级。当排队者 $q(w)$ 遇到一个处于寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 的可以匹配的寻人者时，只有在没有拥有更高匹配优先级的排队者与该寻人者匹配时， $o(a, \omega)$ 上的寻人者才会与 $q(w)$ 匹配。因此，对于在状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 中的排队者，来自寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 匹配机会的平均到达速率可以表示为：

$$\zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} = \begin{cases} \phi_{o(a, \omega)} \prod_{q(w') \in \mathbf{Q}_{o(a, \omega)}^{> q(w)}} (1 - \rho_{q(w')}), & \mathbf{Q}_{o(a, \omega)}^{> q(w)} \neq \emptyset \\ \phi_{o(a, \omega)}, & \text{其他} \end{cases}, c_{a, \omega}^w \in \mathbf{C}_{qo} \quad (3.27)$$

其中 $\phi_{o(a, \omega)}$ 是进入寻人者状态 $o(a, \omega)$ 的订单平均到达率， $\prod_{q(w') \in \mathbf{Q}_{o(a, \omega)}^{> q(w)}} (1 - \rho_{q(w)})$ 是指没有拥有比 $q(w)$ 匹配优先级更高的排队者可以与在 $o(a, \omega)$ 中的寻人者匹配的概率。来自不同寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 的匹配机会的会聚到达排队者状态 $q(w)$ 的平均速率，记为 $\zeta_{q(w)}$ ，为：

$$\zeta_{q(w)} = \begin{cases} \sum_{o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}} \zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)}, & \mathbf{O}_{q(w)} \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, q(w) \in \mathbf{Q} \quad (3.28)$$

如公式 (3.22) – (3.25) 所示，每个寻车者状态和接载者状态的匹配概率都取决于概率 $\rho_{t(a, \omega)}, t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 。对于每个接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ ，在任何时刻有一个订单处于该状态的概率 $\rho_{t(a, \omega)}$ 可近似根据未匹配的订单进入该状态的到达速率，记为 $\lambda_{t(a, \omega)}$ ，以及订单在该状态的平均停留时间，记为 $\tau_{t(a, \omega)}$ ，来估计。对于到达接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 的未匹配订单，他可能会在该状态中被匹配，也可能不会：1) 如果订单在状态 $t(a, \omega)$ 中未被匹配，则订单在该状态的停留时间为 t_a ；2) 如果订单在状态 $t(a, \omega)$ 中被匹配，则订单在该状态的停留时间从进入该状态起到匹配发生前。接载者状态 $t(a, \omega)$ 中，匹配机会到达的平均速率为 $\eta_{t(a, \omega)}$ ，我们可以根据全概率公式推导出 $\tau_{t(a, \omega)}$ ，即：

$$\tau_{t(a, \omega)} = \int_0^{t_a} t \eta_{t(a, \omega)} \exp(-\eta_{t(a, \omega)} t) dt + (1 - \rho_{t(a, \omega)}) \bar{t}_a \quad (3.29)$$

将公式 (3.25) 代入上述公式中，得到：

$$\tau_{t(a, \omega)} = \begin{cases} \frac{1 - \exp(-\eta_{t(a, \omega)} t_a)}{\eta_{t(a, \omega)}}, & \eta_{t(a, \omega)} > 0 \\ t_a, & \eta_{t(a, \omega)} = 0 \end{cases}, t(a, \omega) \in \mathbf{T} \quad (3.30)$$

假设在任何时刻，接载者状态 $t(a, \omega)$ 中最多只有一个订单，则在一个单位时间内，平均有 $\lambda_{t(a, \omega)}$ 个订单转入状态 $t(a, \omega)$ ，并且在状态 $t(a, \omega)$ 中的每个订单在平均时间 $\tau_{t(a, \omega)}$ 内可以进行匹配，则在状态 $t(a, \omega)$ 中存在订单的概率可以近似表示为：

$$\rho_{t(a, \omega)} = \lambda_{t(a, \omega)} \tau_{t(a, \omega)} = \begin{cases} \frac{\lambda_{t(a, \omega)} [1 - \exp(-\eta_{t(a, \omega)} t_a)]}{\eta_{t(a, \omega)}}, & \eta_{t(a, \omega)} > 0 \\ \lambda_{t(a, \omega)} t_a, & \eta_{t(a, \omega)} = 0 \end{cases}, t(a, \omega) \in \mathbf{T} \quad (3.31)$$

类似地，如公式 (3.26) – (3.28) 所示，每个寻人者状态的匹配概率 $p_{o(a,\omega)}$ 和到达每个排队者状态的匹配机会到达率 $\zeta_{q(w)}$ 都取决于概率 $\rho_{q(w)}, q(w) \in \mathbf{Q}$ 。在系统稳定状态下， $\rho_{q(w)}$ 可以通过对队列中订单数不为零的状态的极限概率求和得到，即：

$$\rho_{q(w)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{(i,0)}^{(w)} = \begin{cases} 1 - \frac{1 - (\rho_1^{(w)})^{V+1}}{1 - \rho_1^{(w)}} P_{(0,V)}^{(w)}, & \rho_1^{(w)} \neq 1 \\ 1 - \frac{1}{V+1} P_{(0,V)}^{(w)}, & \rho_1^{(w)} = 1 \end{cases}, w \in \mathbf{W} \quad (3.32)$$

其中， $\rho_1^{(w)}$ 和 $P_{(i,j)}^{(w)}$ 分别为 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 起点处的订单/空车队列对应的第 3.1 节中马尔可夫链中的变量 ρ_1 和 $P_{(i,j)}$ 。

第 3.1 节另一未解决的问题是，在马尔可夫链中，当队列中没有订单在排队时，进入排队者状态的订单到达率 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 如何计算。记排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 中有（无）订单存在时，新到达寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 的订单的匹配概率为 $p_{s(w)}^{(+)}$ ($p_{s(w)}^{(-)}$)。根据全概率公式，寻车者状态 $s(w)$ 的平均匹配概率 $p_{s(w)}$ 应该满足：

$$p_{s(w)} = p_{s(w)}^{(+)} \rho_{q(w)} + p_{s(w)}^{(-)} (1 - \rho_{q(w)}), w \in \mathbf{W} \quad (3.33)$$

当排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 中有订单在等待时，任何订单在进入接载者状态 $t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 前，都会与先进入寻人者状态 $o(a,\omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 并与排队者状态 $q(w)$ 中的订单发生匹配。因此，新到达寻车者状态 $s(w)$ 的订单不会在接载者状态 $t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 中检索到订单，所以有：

$$p_{s(w)}^{(+)} = 0, s(w) \in \mathbf{S} \quad (3.34)$$

根据式 (3.33)，有：

$$p_{s(w)}^{(-)} = \frac{p_{s(w)}}{1 - \rho_{q(w)}}, w \in \mathbf{W} \quad (3.35)$$

进而，当队列中没有订单在排队时，进入排队者状态的订单到达率 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 是剩余的在寻车者状态 $s(w)$ 未发生匹配的订单：

$$\tilde{\lambda}_{q(w)} = \lambda_w \left(1 - \frac{p_{s(w)}}{1 - \rho_{q(w)}} \right), w \in \mathbf{W} \quad (3.36)$$

注意到，根据式 (3.32) 和 (3.10)， $\rho_{q(w)}$ 也是 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 的函数。因此，需要证明由等式 (3.36) 得到的 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 的唯一性，这将由命题 3.3 进行保证。

命题 3.3. 给定 $\lambda_w, \mu_w, \zeta_{q(w)}, p_{s(w)}$ 的条件下，方程 (3.36)

$$\tilde{\lambda}_{q(w)} = \lambda_w \left(1 - \frac{p_{s(w)}}{1 - \rho_{q(w)}(\tilde{\lambda}_{q(w)})} \right)$$

的解 $\tilde{\lambda}_{q(w)}$ 存在且唯一。

证明. 命题 3.3 的证明见附录 B。

最后，我们讨论 OD 对 $\omega \in \mathbf{W}$ 间未匹配的订单进入寻人者状态 $o(a,\omega)$ 和接载者状态 $t(a,\omega)$ 的

平均到达率，分别记为 $\phi_{o(a,\omega)}$ 和 $\lambda_{t(a,\omega)}$ 。首先，在 OD 对 ω 起点处只接驾了一个订单的空车会进入这个 OD 对间的第一个寻人者状态，即：

$$\phi_{o(a_0^1,\omega)} = \mu_\omega^{(1)} \tag{3.37}$$

如图 2.1 所示，在 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的订单只有在寻人者状态 $o(a_\omega^n, \omega)$ （其前一个接载者状态 $t(a_\omega^{n-1}, \omega)$ ）中未被匹配时，才会在状态 $t(a_\omega^n, \omega)$ ($o(a_\omega^n, \omega)$) 成为接载者（寻人者）。因此，对于每个寻人者状态 $o(a, \omega)$ 和接载者状态 $t(a, \omega)$ ，根据匹配概率 $(p_{o(a,\omega)}, p_{t(a,\omega)}, a \in A_\omega)$ ，未匹配订单的到达速率可以表示为：

$$\phi_{o(a_\omega^n, \omega)} = \lambda_{t(a_\omega^{n-1}, \omega)} (1 - p_{t(a_\omega^{n-1}, \omega)}), n > 1, \omega \in \mathbf{W} \tag{3.38}$$

$$\lambda_{t(a_\omega^n, \omega)} = \phi_{o(a_\omega^n, \omega)} (1 - p_{o(a_\omega^n, \omega)}), n \geq 1, \omega \in \mathbf{W} \tag{3.39}$$

表 3.1: 第 3 章模型变量列表

变量符号	变量含义
$p_{s(w)}$	订单在寻车者状态 $s(w)$ 被匹配的概率
$p_{o(a,\omega)}$	订单在寻人者状态 $o(a, \omega)$ 被匹配的概率
$p_{t(a,\omega)}$	订单在接载者状态 $t(a, \omega)$ 被匹配的概率
$\rho_{q(w)}$	排队者状态 $q(w)$ 至少有一个订单的概率
$\rho_{t(a,\omega)}$	接载者状态 $t(a, \omega)$ 至少有一个订单的概率
$\tilde{\lambda}_{q(w)}$	没有订单处于排队者状态 $q(w)$ 时订单到达 $q(w)$ 的平均到达率
$\phi_{o(a,\omega)}$	订单到达寻人者状态 $o(a, \omega)$ 的平均到达率
$\lambda_{t(a,\omega)}$	订单到达接载者状态 $t(a, \omega)$ 的平均到达率

到目前为止，我们已经定义了表 3.1 中总结的八种变量，并在式 (3.22) – (3.39) 中对它们的相互作用进行了建模。当系统达到稳态时，所有方程式应同时得到满足。设 $X_w = (p_{s(w)}, p_{o(a,w)}, p_{t(a,w)}, \rho_{q(w)}, \rho_{t(a,w)}, \tilde{\lambda}_{q(w)}, \phi_{o(a,w)}, \lambda_{t(a,w)}, a \in A_w)$ 是与 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 相关的变量集合， $X = (X_w, w \in \mathbf{W})$ 是上述所有变量组成的向量，因此式 (3.22) – (3.39) 可被视为 Ω 上的不动点问题：

$$X = F(X) \tag{3.40}$$

其中， F 由式 (3.22) – (3.39) 的右侧定义， Ω 是 X 的可行域集合，定义如下：

$$\Omega = \left\{ X \left| \begin{array}{ll} 0 \leq p_{s(w)}, p_{o(a,w)}, p_{t(a,w)}, \rho_{q(w)}, \rho_{t(a,w)} \leq 1 & , s(w) \in \mathbf{S}, o(a, w) \in \mathbf{O}, t(a, w) \in \mathbf{T} \\ 0 \leq \tilde{\lambda}_{q(w)}, \phi_{o(a,w)}, \lambda_{t(a,w)} \leq \lambda_w & , t(a, w) \in \mathbf{T} \end{array} \right. \right\} \tag{3.41}$$

以下命题可以保证不动点问题 (3.40) 解的存在性：

命题 3.4. 如果 $\max \{ \lambda_w t_a, a \in A_w, w \in \mathbf{W} \} \leq 1$ ，则非线性方程组 (3.22) – (3.39) 存在解。

证明. 命题 3.4 的证明见附录 B。

为了解决公式 (3.40) 获得解，我们采用了一个简单的不动点迭代方法：从一个可行的初始值 $X_0 \in \Omega$ 开始，每次迭代更新 X 的值，即 $X_{k+1} = F(X_k)$ ，并在 $|X_{k+1} - X_k|/|X_k| \leq \varepsilon$ 时停止迭代。该方法的收敛性不能保证，但在我们所有的数值实验中，它都成功收敛。

3.3 订单关键指标计算

在给定订单需求率 $\lambda_w, w \in \mathbf{W}$ 和空车供给率 $\mu_w, w \in \mathbf{W}$ 的条件下，给定每个状态下的匹配概率，我们可以计算每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的匹配概率、预期行驶里程和预期共乘里程。对于 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间的订单，它们在到达目的地之前被匹配的概率 $P_w(X)$ 可以表示为：

$$P_w(X) = 1 - \left(1 - p_{t(a_w^{\Delta w}, w)}\right) \cdot \lambda_{t(a_w^{\Delta w}, w)} / \lambda_w, w \in \mathbf{W} \quad (3.42)$$

设 $L_{\text{psg}}(w, (a, \omega))$ 和 $L_{\text{veh}}(w, (a, \omega))$ 分别表示匹配 $m_{a, \omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a, \omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 中如果订单形成拼车行程后的等待接驾的订单和接驾车辆上的订单分别的行驶里程。对于每个匹配 $m_{a, \omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a, \omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ ，已知它们的订单和接驾车辆的位置和 OD 对，因此可以预先确定 $L_{\text{psg}}(w, (a, \omega))$ 和 $L_{\text{veh}}(w, (a, \omega))$ 。设 $L_{s(w)}(X)$ 和 $L_{t(a, w)}(X)$ 分别表示在状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 和 $t(a, w) \in \mathbf{T}$ 中被匹配的订单的预期行驶里程， $L_{q(w)}^{(o)}(X)$ 和 $L_{o(a, w)}(X)$ 分别表示在状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 和 $o(a, w) \in \mathbf{O}$ 中被来自其他 OD 对 $\omega \neq w$ 之间的寻人者/排队者匹配的订单的预期行驶里程。

对于接载者状态 $t(a, \omega)$ ，它从寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a, \omega)}$ 中获得匹配机会的速率为 $\eta_{t(a, \omega)}^{s(w)}$ ，当接载者状态 $t(a, \omega)$ 中确实有订单时，每个匹配机会都会转化为一个匹配。因此，每个匹配 $m_{a, \omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 的发生率可以表示为 $\eta_{t(a, \omega)}^{s(w)} \rho_{t(a, \omega)}$ 。然后， $L_{s(w)}(X)$ 和 $L_{t(a, w)}(X)$ 可以通过其寻车者状态和接载者状态的行驶里程的加权平均值来估计：

$$L_{s(w)}(X) = \frac{\sum_{t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} \eta_{t(a, \omega)}^{s(w)} \rho_{t(a, \omega)} L_{\text{psg}}(w, (a, \omega))}{\sum_{t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} \eta_{t(a, \omega)}^{s(w)} \rho_{t(a, \omega)}} \quad (3.43)$$

$$L_{t(a, w)}(X) = \frac{\sum_{s(w) \in \mathbf{S}_{t(a, \omega)}} \eta_{t(a, \omega)}^{s(w)} \rho_{t(a, \omega)} L_{\text{veh}}(w, (a, \omega))}{\sum_{s(w) \in \mathbf{S}_{t(a, \omega)}} \eta_{t(a, \omega)}^{s(w)} \rho_{t(a, \omega)}} \quad (3.44)$$

对于排队者状态 $q(w)$ ，它从寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 中获得匹配机会的速率为 $\zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)}$ ，当排队者状态 $q(w)$ 中确实有订单时，每个匹配机会都会转化为一个匹配。因此，每个匹配 $c_{a, \omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 的发生率可以表示为 $\zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} \rho_{q(w)}$ 。然后， $L_{q(w)}^{(o)}(X)$ 和 $L_{o(a, w)}(X)$ 可以通过其寻人者状态和排队者状态的行驶里程的加权平均值来估计：

$$L_{q(w)}^{(o)}(X) = \frac{\sum_{o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}} \zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} \rho_{q(w)} L_{\text{psg}}(w, (a, \omega))}{\sum_{o(a, \omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}} \zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} \rho_{q(w)}} \quad (3.45)$$

$$L_{o(a, w)}(X) = \frac{\sum_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a, \omega)}} \zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} \rho_{q(w)} L_{\text{veh}}(w, (a, \omega))}{\sum_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a, \omega)}} \zeta_{q(w)}^{o(a, \omega)} \rho_{q(w)}} \quad (3.46)$$

设 $L_w(X)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期行驶里程。根据式 (3.43) – (3.46)，我们有：

$$\begin{aligned}
 L_w(X) &= p_{s(w)} L_{s(w)}(X) \\
 &+ (2\mu_w^{(2)} / \lambda_w) L_w^0 \\
 &+ ((1 - p_{s(w)}) - (\mu_w^{(1)} + 2\mu_w^{(2)}) / \lambda_w) L_{q(w)}^{(o)}(X) \\
 &+ \sum_{a \in \mathbf{A}_w} (\phi_{o(a,w)} / \lambda_w) p_{o(a,w)} L_{o(a,w)}(X) \\
 &+ \sum_{a \in \mathbf{A}_w} (\lambda_{t(a,w)} / \lambda_w) p_{t(a,w)} L_{t(a,w)}(X) \\
 &+ (1 - P_w(X)) L_w^0, w \in \mathbf{W}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

其中， L_w^0 是 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单独自乘车的行驶里程，式 (3.47) 第一行是订单在寻车者状态 $s(w)$ 的预期行驶里程，第二行是在排队者状态 $q(w)$ 中和与自己相同 OD 对的订单共乘的订单的预期行驶里程，第三行是在排队者状态 $q(w)$ 中被来自其他 OD 对的订单匹配的订单的预期行驶里程，第四行是订单在寻人者状态 $o(a,w), a \in \mathbf{A}_w$ 的预期行驶里程，第五行是订单在接载者状态 $t(a,w), a \in \mathbf{A}_w$ 的预期行驶里程，第六行是全程未发生匹配的订单的预期行驶里程。

设 $r_w(X)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期绕行里程，可以通过订单的预期行驶里程减去订单全程被单独接驾时的行驶里程进行计算，即：

$$r_w(X) = L_w(X) - L_w^0 \tag{3.48}$$

与计算预期行驶里程类似，设 $e(w, (a, \omega))$ 表示匹配 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 中如果订单形成拼车行程后的共乘里程， $e_{s(w)}(X)$ 和 $e_{t(a,w)}(X)$ 分别表示订单在状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 和 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 中被匹配的订单的预期行驶里程， $e_{q(w)}^{(o)}(X)$ 和 $e_{o(a,w)}(X)$ 分别表示订单在状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 和 $o(a,w) \in \mathbf{O}$ 中被来自其他 OD 对 $\omega \neq w$ 之间的寻人者/排队者匹配的订单的预期共乘里程。类似式 (3.43) – (3.46)，我们有：

$$e_{s(w)}(X) = \frac{\sum_{t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} \eta_{t(a,\omega)}^{s(w)} \rho_{t(a,\omega)} e(w, (a, \omega))}{\sum_{t(a,\omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}} \eta_{t(a,\omega)}^{s(w)} \rho_{t(a,\omega)}} \tag{3.49}$$

$$e_{t(a,w)}(X) = \frac{\sum_{s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}} \eta_{t(a,\omega)}^{s(w)} \rho_{t(a,\omega)} e(w, (a, \omega))}{\sum_{s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,\omega)}} \eta_{t(a,\omega)}^{s(w)} \rho_{t(a,\omega)}} \tag{3.50}$$

$$e_{q(w)}^{(o)}(X) = \frac{\sum_{o(a,\omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}} \zeta_{o(a,\omega)}^{q(w)} \rho_{q(w)} e(w, (a, \omega))}{\sum_{o(a,\omega) \in \mathbf{O}_{q(w)}} \zeta_{o(a,\omega)}^{q(w)} \rho_{q(w)}} \tag{3.51}$$

$$e_{o(a,w)}(X) = \frac{\sum_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}} \zeta_{o(a,\omega)}^{q(w)} \rho_{q(w)} e(w, (a, \omega))}{\sum_{q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}} \zeta_{o(a,\omega)}^{q(w)} \rho_{q(w)}} \tag{3.52}$$

设 $e_w(X)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期共乘里程。根据式 (3.49) – (3.52)，我们有：

$$\begin{aligned}
 e_w(X) &= p_{s(w)} e_{s(w)}(X) \\
 &+ (2\mu_w^{(2)} / \lambda_w) L_w^0 \\
 &+ ((1 - p_{s(w)}) - (\mu_w^{(1)} + 2\mu_w^{(2)}) / \lambda_w) e_{q(w)}^{(o)}(X) \\
 &+ \sum_{a \in \mathbf{A}_w} (\phi_{o(a,w)} / \lambda_w) p_{o(a,w)} e_{o(a,w)}(X) \\
 &+ \sum_{a \in \mathbf{A}_w} (\lambda_{t(a,w)} / \lambda_w) p_{t(a,w)} e_{t(a,w)}(X)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

注意到，与式 (3.47) 不同，全程未发生匹配的订单的共乘里程为零。

最后，设 $\tau_w(X)$ 表示 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期等待时长，根据 *Little* 法则，我们有：

$$\tau_w(X) = I_{q(w)}^{\text{psg}} / \lambda_w \tag{3.54}$$

该式与式 (3.21) 不同，这里考察的订单范围不仅包括进入排队者状态的订单，还包括了在寻车者状态即被匹配的订单，因此公式中的分母为该 OD 间订单的平均到达率 λ_w 。

3.4 系统关键指标计算

基于各 OD 对间订单的这些关键指标的计算，我们可以进一步研究整个动态拼车系统在稳定状态下的效率与效益。

系统中所有订单的平均拼车成功率 \bar{P} 和平均等待时长 $\bar{\tau}$ 可以通过对每个 OD 对间订单的匹配概率和等待时长以订单的平均到达率作为权重求加权平均值计算，即：

$$\bar{P} = \frac{\sum_{w \in \mathbf{W}} \lambda_w P_w}{\sum_{w \in \mathbf{W}} \lambda_w} \tag{3.55}$$

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{w \in \mathbf{W}} \lambda_w \tau_w}{\sum_{w \in \mathbf{W}} \lambda_w} \tag{3.56}$$

对于 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的订单而言，车辆每服务一个订单平均需要行驶 $L_w - e_w/2$ 里程，其中共乘里程 e_w 需要分摊给两个订单；而系统在稳定状态时，每单位时间平均需要为 λ_w 个订单进行服务，因此系统中所有车辆每单位时间的平均行驶里程 \bar{L} 为：

$$\bar{L} = \sum_{w \in \mathbf{W}} \lambda_w \left(L_w - \frac{e_w}{2} \right) \tag{3.57}$$

假设整个系统的车辆平均行驶速度为 v ，用车辆每单位时间的平均行驶里程除以车辆平均行驶速度可以估计系统中每单位时间里正在行驶的车辆数量，可以得到系统中平均每单位时间被占用的车辆数量，记为 $\bar{N}^{(+)}$ ：

$$\bar{N}^{(+)} = \bar{L} / v \tag{3.58}$$

空车的平均占用率 $\bar{\gamma}$ 可以通过订单/空车队列中空车接驾订单离开队列的速率除以空车的到达率得到，即：

$$\bar{\gamma} = \frac{\sum_{w \in W} \mu_w^{(+)} }{\sum_{w \in W} \mu_w} \quad (3.59)$$

系统中平均每单位时间被占用的车辆数量除以整个系统中空车的平均占用率即可得到系统中平均每单位时间的车辆总数，记为 \bar{N} ：

$$\bar{N} = \bar{N}^{(+)} / \bar{\gamma} \quad (3.60)$$

最后，我们测算系统中每单位时间平台可以获得的净利润。假设平台对订单的收费和订单全程被单独接驾的行驶里程成线性关系，每单位距离收费 h_{psg} ，则记 \bar{L}^0 为所有订单全程都被单独接驾时每单位时间产生的平均行驶里程：

$$\bar{L}^0 = \sum_{w \in W} \lambda_w L_w^0 \quad (3.61)$$

记车辆每行驶单位距离的成本为 h_{veh} ，司机每单位时间的薪资为 h_{drv} 以及订单每等待单位时间产生的成本为 h_{wat} ，由此可以计算平台平均每单位时间的可以获得的净利润 \bar{H} ：

$$\bar{H} = h_{psg} \bar{L}^0 - h_{veh} \bar{L} - h_{drv} \bar{N} - h_{wat} \bar{\tau} \sum_{w \in W} \lambda_w \quad (3.62)$$

3.5 本章小结

本章是全文的核心部分，对动态拼车的整个过程进行了建模，包括随着订单和空车的随机到达而在 OD 对起点处形成的订单/空车队列，未匹配的订单被空车接驾后从起点到终点的匹配过程，以及订单/空车队列和未被匹配的订单流间的交互关系。这些复杂的关系被建模成了不同状态的变量和变量之间的依赖关系。最终，通过求解一个不动点问题，可以获得该系统稳定状态下各变量的值。根据这些变量的值，可以计算出系统稳定状态下的订单匹配成功率、预期共乘/绕行里程和预期等待时长等指标，再基于这些订单关键指标，我们可以进一步计算有关整个系统的效率和效益的指标，包括平均拼车成功率、平均订单等待时长、单位时间平均车辆行驶里程、平均空车占用率和平均车辆数量等。

4 数值实验

4.1 订单/空车排队过程

在第 3.1 节中，我们将因为订单和空车的随机到达，而在起点形成的订单/空车队列建模成了一条马尔可夫链。为了验证模型的准确性，我们给定了一系列参数，并通过数值计算和离散事件仿真，分别得到了该队列在这些参数下的性能指标，例如订单和空车的流出速率以及订单的平均等待时间等。我们将数值计算结果与仿真结果进行对比，并分析了不同参数对订单/空车队列这些性能指标的影响。

在基准场景中，我们设置参数 $\lambda_w = 1.0, \tilde{\lambda}_{q(w)} = 0.8, \mu = 0.6, \zeta_{q(w)} = 0.2, V = 3$ ，观察订单和空车的流量情况以及订单的平均等待时间。为了得到这些性能指标，一方面，我们使用式 (3.11) – (3.21) 进行数值计算；另一方面，我们使用离散事件仿真模拟了订单和空车的排队过程，包括到达、匹配和离开。在仿真程序中，我们运行了 50,000 秒，并对第 10,000 – 40,000 秒的结果进行统计。最终得到的数值和仿真结果如表 4.1 所示。可以看到，数值结果和仿真结果之间的绝对误差和相对误差大多都很小；其中，变量 $\mu_w^{(-)}$ 的相对误差最大 (10.96%)，这是由于它的绝对值很小，微小的绝对误差也会带来很大的相对误差。

表 4.1: 订单/空车队列基准场景数值结果和仿真结果比较

变量	仿真结果	数值结果	绝对误差	相对误差 (%)
μ_w	0.606	0.600	0.006	0.91
$\mu_w^{(-)}$	0.050	0.045	0.005	10.96
$\mu_w^{(1)}$	0.313	0.311	0.002	0.64
$\mu_w^{(2)}$	0.243	0.245	0.002	0.82
$\bar{\lambda}$	0.899	0.904	0.004	0.50
$\lambda_w^{(1)}$	0.313	0.311	0.002	0.64
$\lambda_w^{(2)}$	0.485	0.489	0.004	0.82
$\lambda_w^{(o)}$	0.101	0.104	0.003	2.49
$\tau_{q(w)}$	2.663	2.684	0.021	0.80

在基准场景的基础上，我们分别调整订单的到达率 λ_w 、空车的到达率 μ_w 以及空车队列的最大容量 V ，并保持其他参数不变，以观察变化的参数对订单和空车的流出速率以及订单的平均等待时间的影响。我们得到了数值结果和仿真结果，并将它们以曲线和散点的形式展示在图 4.1 和 4.2 中。从图中可以观察到以下情况：1) 在众多不同场景下，仿真结果与数值结果之间的差距很小；2) 随着订单到达率 λ_w 的增加，空车未接到订单即离开队列的比例降低，空车一次性接驾该 OD 对间的两个拼车订单的比例增加，其他 OD 对间行驶车辆上的订单的匹配机会也增加，但该 OD 对间订单的等待时间增加；3) 随着空车到达率 μ_w 的增加，空车因队列过长而离开的速率增加，能够与其他订单匹配的订单比例减少，该 OD 对间订单的等待时间减少；4) 随着空车队列的最大容量 V 的增加，空车直接离开的比例降低，队列里也更有可能有更多的空车，因此订单的匹配比例和等待时间都有所减少。这些结果符合实际生活中的场景，当需求较高时，空车闲置率较低，订单之间更有可能匹配，但订单等待时间较长；当供给较高时，空车闲置率较高，订单之间匹配的机会减少（供给

较高时，乘客的拼单意愿也会降低），订单等待时间较短。综上所述，我们提出的模型的准确性和合理性均得到了验证。

4.2 动态拼车系统预测与仿真

为了验证第 3.2 节中提出的预测方法的准确性，我们基于如图 4.3 所示的 30×30 网格网络（每个网格的边长为 500 米）比较了随机生成的每个 OD 对的匹配概率、预期共乘/绕行里程和预期等待时间的数值计算结果和仿真结果。我们随机生成了 300 个 OD 对，每个 OD 对的起点（红色）和终点（蓝色）服从整个网络上的均匀分布，每个 OD 对的需求率随机生成。为了考察空车供给和订单需求的变化对整个动态拼车系统的影响，我们定义了供给规模系数 ι 和需求规模系数 κ 。在记为 $b(1,1)$ 的基准场景中，订单的需求率服从 $[0.005, 0.025]$ 订单/分钟的均匀分布，空车的供给率与订单的需求率相同。在其他不同的场景 $b(\iota, \kappa)$ 中，每个 OD 对间空车的供给率分别是基准场景中对应 OD 对间订单需求率的 ι 倍，订单的需求率分别是基准场景中对应 OD 对间订单需求率的 κ 倍。我们将考察的所有场景集合记为 B ，匹配条件设置为 $\bar{R} = 2$ 个网格和 $\bar{D} = 3$ 个网格，每个 OD 对起点处的空车队列的最大长度为 $V = 5$ ，车辆在每条路段上的速度设置为 $v = 500$ 米/分钟。

在任何给定的场景 $b(\iota, \kappa) \in B$ 下，我们一方面可以通过以下步骤预测每个 OD 对间订单的匹配概率、预期的共乘/绕行里程和预期等待时间：1) 根据匹配条件检索生成寻车者-接载者匹配和排队者-寻车者匹配的集合（即 M_w 和 C_{qo} ），具体的检索步骤可见附录 C；2) 解决不动点问题 (3.40)，得到解 X ，再根据式 (3.42)–(3.54) 计算 $P_w(X), e_w(X), r_w(X), \tau_w(X), w \in W$ 。另一方面，在每次仿真中，我们根据每个 OD 对间订单和空车的平均到达率生成订单和空车，然后使用离散事件仿真在第 2 章描述的排队和匹配方法下，模拟每个订单的发生、移动和状态转换。根据每个订单的匹配结果，我们可以计算在给定的需求和供给条件下成功匹配的订单比例 \tilde{P}_w 、每个 OD 对之间订单的平均共乘里程 \tilde{e}_w 和平均绕行里程 \tilde{r}_w 以及平均等待时间 $\tilde{\tau}_w$ 。将为 300 个 OD 对间的订单预测的匹配概率、预期共乘和绕行里程，以及预期等待时间与基于仿真得到的结果进行比较，可以计算每一个 OD 对间订单的这四个指标预测值和仿真值间的绝对误差和相对误差，即：

$$\Delta P_w = |P_w(X) - \tilde{P}_w|, \delta P_w = |P_w(X) - \tilde{P}_w| / \tilde{P}_w, w \in W \quad (4.1)$$

$$\Delta e_w = |e_w(X) - \tilde{e}_w|, \delta e_w = |e_w(X) - \tilde{e}_w| / \tilde{e}_w, w \in W \quad (4.2)$$

$$\Delta r_w = |r_w(X) - \tilde{r}_w|, \delta r_w = |r_w(X) - \tilde{r}_w| / \tilde{r}_w, w \in W \quad (4.3)$$

$$\Delta \tau_w = |\tau_w(X) - \tilde{\tau}_w|, \delta \tau_w = |\tau_w(X) - \tilde{\tau}_w| / \tilde{\tau}_w, w \in W \quad (4.4)$$

运行预测和仿真程序时，不动点求解时收敛标准设置为 $\epsilon = 10^{-6}$ ，每个仿真在时间达到 500,000 分钟时停止，前后各 100,000 分钟不作统计。图 4.4 和图 4.5 分别是在基准场景 $b(1,1)$ 下这四个指标的绝对误差和相对误差的小提琴图；表 4.2 是这些误差的统计数据，包括最小值、分位数、最大值和平均值。如这些图和表所示，我们预测的结果与仿真结果相当吻合。我们预测的匹配概率的绝对（相对）误差均值为 0.83%（1.81%），共乘里程的绝对（相对）误差的平均值为 62.11 米（2.59%），绕行距离的绝对（相对）误差的平均值为 6.01 米（2.93%），订单等待时间的绝对（相对）误差的平均值为 0.30 分钟（14.35%）。

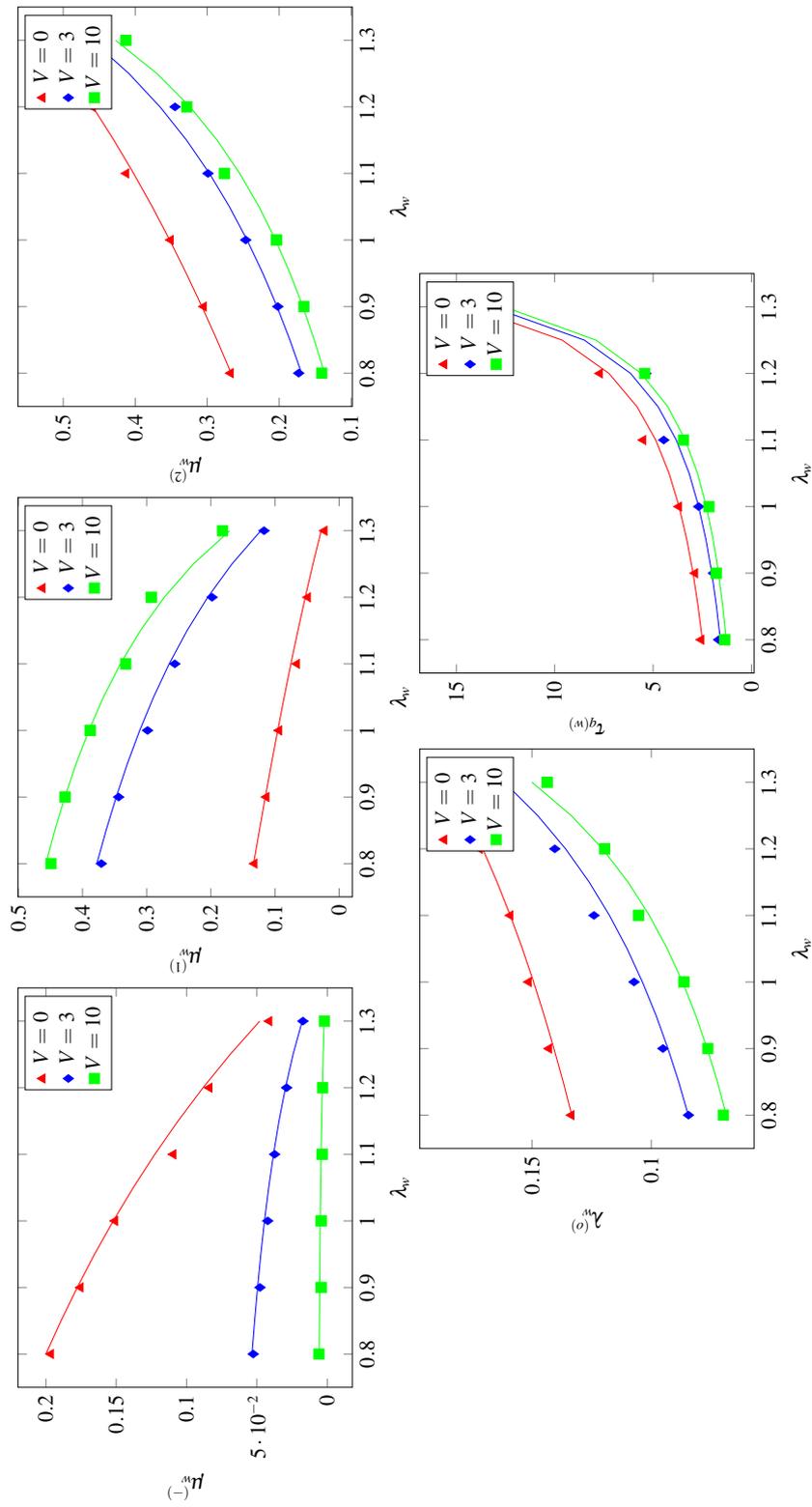


图 4.1: 订单到达率 λ_w 对订单和空车的流出速率以及订单的平均等待时间的影响

装 订 线

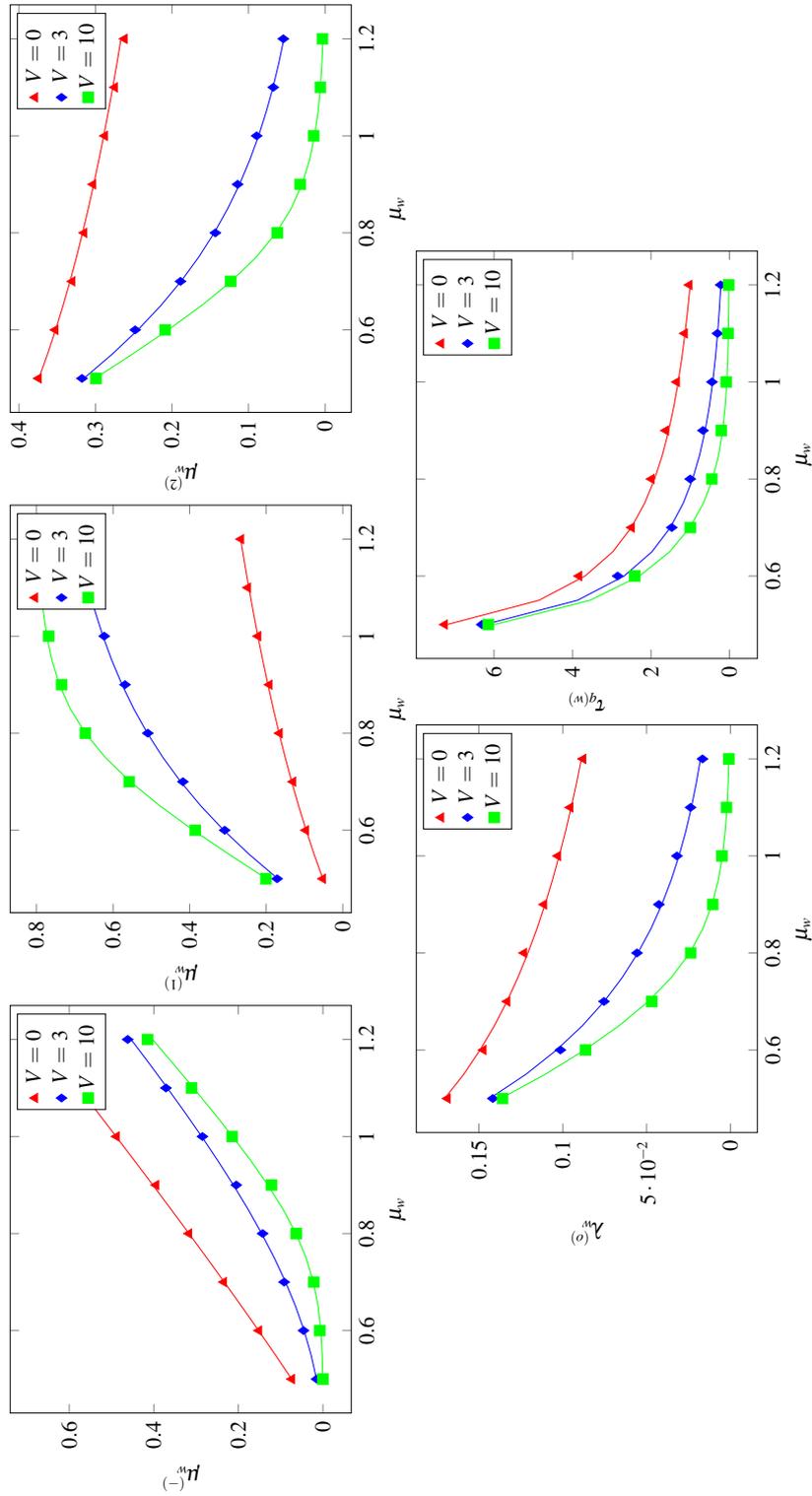


图 4.2: 订单到达率 μ_w 对订单和空车的流出速率以及订单的平均等待时间的影响

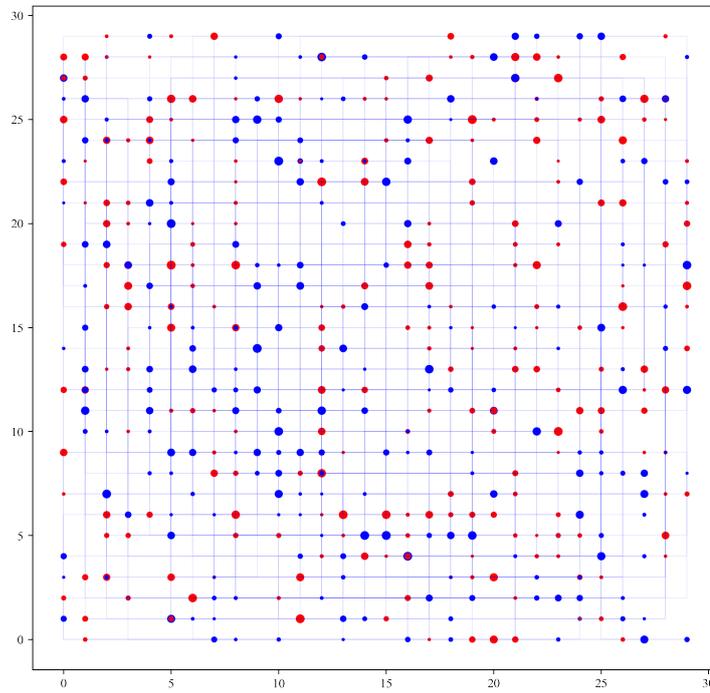


图 4.3: 30 × 30 网格网络示意图

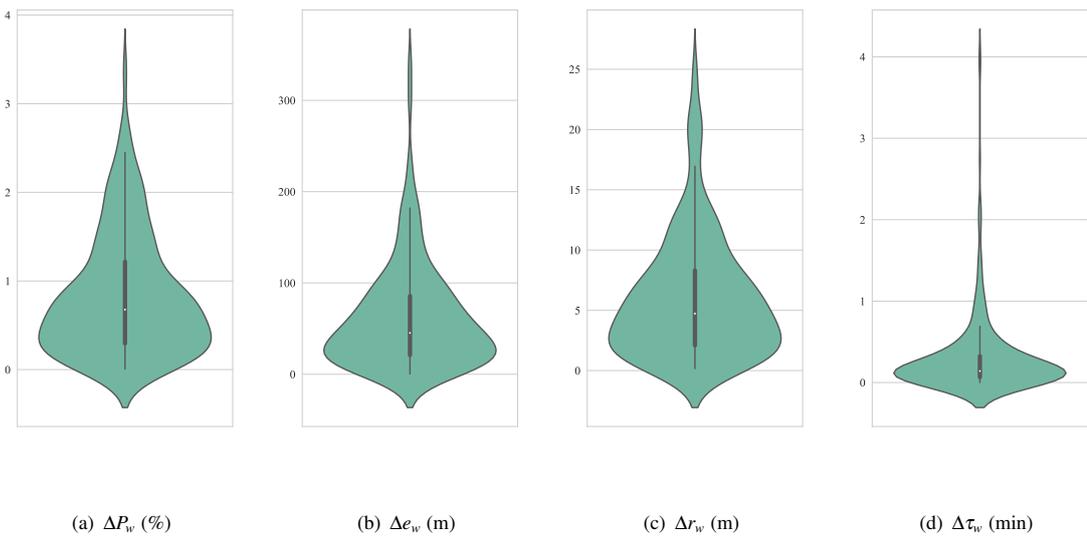


图 4.4: 300 个 OD 对间订单指标的预测值的绝对误差

装
订
线

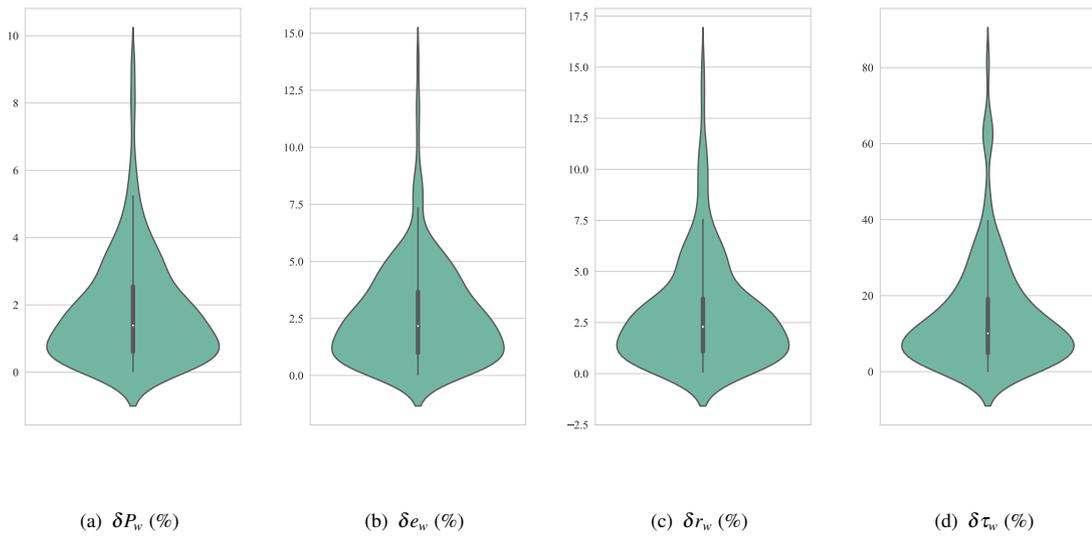


图 4.5: 300 个 OD 对间订单指标的预测值的相对误差

表 4.2: 300 个 OD 对间订单指标的预测值的绝对误差和相对误差统计

	ΔP_w (%)	Δe_w (m)	Δr_w (m)	$\Delta \tau_w$ (min)	δP_w (%)	δe_w (%)	δr_w (%)	$\delta \tau_w$ (%)
最小值	0.01	0.33	0.16	0.00	0.02	0.03	0.09	0.05
25% 分位数	0.29	20.93	2.09	0.07	0.61	0.99	1.08	4.89
中位数	0.68	45.29	4.73	0.14	1.39	2.17	2.30	10.08
75% 分位数	1.22	85.61	8.31	0.32	2.55	3.68	3.67	19.13
最大值	3.41	341.39	25.12	4.03	9.22	13.88	15.27	81.48
平均值	0.83	62.11	6.01	0.30	1.81	2.59	2.93	14.35

4.3 供给、平台规模和网约车模式的影响分析

利用我们的模型，本节考察不同空车供给率、平台规模和网约车模式对整个动态拼车系统整体效率和效益的影响。具体而言，不同空车供给率的场景 $b(\iota, \kappa)$ 下， ι 被整体放大或缩小；不同平台规模的场景 $b(\iota, \kappa)$ 下， ι 和 κ 一起被整体放大或缩小；不同的网约车模式包括不拼车模式（NR）和动态拼车模式（DR）。对于不拼车模式，我们对各个订单以及整个系统的关键指标的计算可见附录 D。

我们假设不同网约车模式下订单每千米的收费都固定为 $h_{psg} = 2.5$ 。另外，车辆每千米的行驶成本为 $h_{veh} = 1$ ，司机每小时的薪资为 $h_{drv} = 30$ 以及订单每分钟的等待成本为 $h_{wat} = 0.2$ 。我们将分别计算不同场景下整个系统中订单的平均拼车成功率 \bar{P} 和平均等待时长 $\bar{\tau}$ 、车辆的平均占用率 $\bar{\gamma}$ 和平均每分钟行驶里程 \bar{L} ，以及平台中平均车辆总数 \bar{N} 和每分钟的平均利润 \bar{H} 。

我们固定订单需求率为 1 不变，在不同空车供给率的场景下，包括 $b(\iota, 1), \iota \in [0.6, 1.9]$ ，考察该系统稳定状态下的各项关键指标，结果如图 4.6 所示。由于对于不拼车的场景， $\iota \leq \kappa$ 会导致排队系统无法稳定，因此，我们忽略这样的场景。随着空车供给率的增大，我们观察到以下趋势：1) 动态拼车模式中订单的平均拼车成功率减小，两个模式中平均等待时长都减小。由于动态拼车能够在途匹配，因此，即使当空车供给率很大、订单/空车队列中几乎没有订单时，新到达的订单仍有较大的匹配机会，且订单等待时长小于不拼车模式。2) 车辆的平均占用率减小，且动态拼车模式下的占用率与不拼车模式相比较小。平均每分钟产生的车辆行驶里程增大，增大的速率逐渐减少并趋向于上界，且动态拼车模式依然由于其在途匹配的能力因而上界小于不拼车模式。由于空车供给率的增加，系统里的车辆总数也在不断增加，且基本呈线性增长。3) 平台的收入由于订单需求率固定不变而不变，随着空车供给率的增加，车辆行驶成本小幅增长，订单等待成本不断减少，但司机薪资成本由于空车供给率的增大而增大，所以平台每分钟的利润最终都是先增大后减小。对于动态拼车模式而言，利润的最大值约在 $\iota \in [0.7, 0.9]$ 处取到；对于不拼车模式而言，利润的最大值约在 $\iota \in [1.5, 1.7]$ 处取到；且动态拼车模式中平台可以获得的最大利润大于不拼车模式。

我们同时调整空车供给率和订单需求率，用以刻画平台规模的变化，在包括 $b(\iota, \kappa), \kappa \in [0.6, 1.9], \iota = 1.2\kappa$ 的场景下，考察该系统稳定状态下的各项关键指标，结果如图 4.7 所示。随着平台规模的扩大，我们观察到：1) 动态拼车模式中订单的平均拼车成功率增大，两个模式中平均等待时长都会减小，但动态拼车模式中订单等待时长远小于不拼车模式。2) 随着平台规模的扩大，订单拥有了更多的匹配机会，因此动态拼车模式中车辆的平均占用率减小，而不拼车模式中的占用率保持不变，且大于动态拼车模式。平均每分钟产生的车辆行驶里程由于订单到达率的增大而增大，但是动态拼车模式中的里程增加率小于不拼车模式。同样，由于空车供给率的增加，系统里的车辆总数也在不断增加。3) 对于平台而言，无论在何种网约车模式下，当平台规模扩大时，平台收入的增加多于成本的增加，因此平台利润不断增大，规模效应体现。而在这些场景下，不拼车模式中订单等待时长过大，这导致了不拼车模式下的平台利润小于动态拼车模式。

但是，数值结果中存在一个我们认为难以解释的现象：为了维持固定的空车供给率，动态拼车模式下系统里的车辆总数大于不拼车模式。一方面，这个现象可能是真实存在的，有待进一步研究其产生的机制；另一方面，这个现象的出现可能是由于我们的数学模型不能精确描述这个系统，数学模型中的不足有待挖掘和弥补。

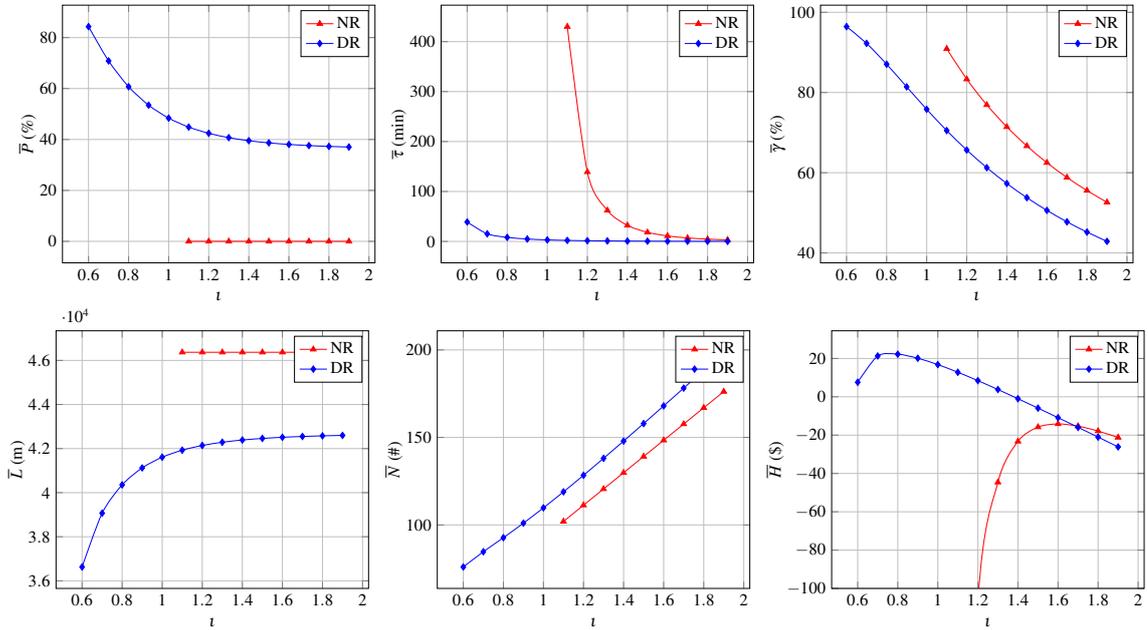


图 4.6: 空车供给率变化对不同网约车模式中乘客、司机和平台的影响

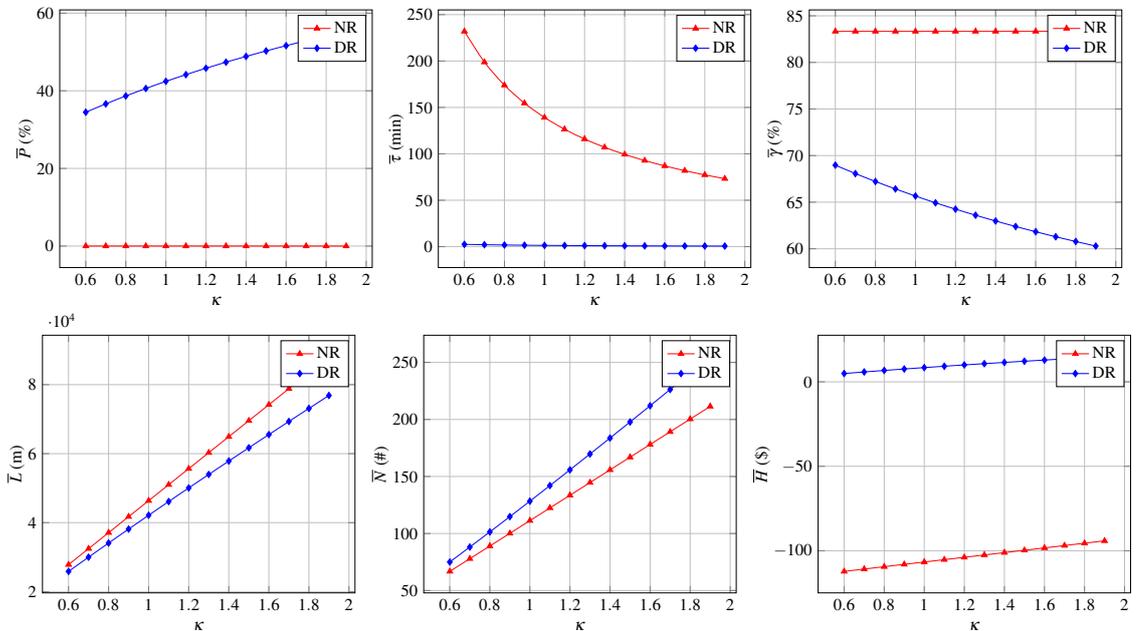


图 4.7: 平台规模变化对不同网约车模式中乘客、司机和平台的影响

4.4 本章小结

本章对上一章建立的模型进行了验证，并根据模型得到一些网约车平台运营的管理启示。首先，我们对订单/空车排队队列分别通过排队论方法和离散事件仿真方法得到该队列在不同订单到达率、空车到达率和空车队列最大长度参数条件下的不同类型的订单/空车的流出速率，两种方法得到的结果非常接近。接着，同样地，对于整个动态拼车系统，我们在网格网络上通过第 3 章介绍的方法得到每个 OD 对间订单的关键指标，并与离散事件仿真方法得到的结果进行对比，结果表明我们的方法具有较高的准确性。最后，我们利用我们的模型，分别在动态拼车模式和不拼车模式中，考察了不同空车供给率和平台规模的条件下，整个系统里订单、车辆和平台的整体效率和效益，结果表明，动态拼车模式相比于不拼车模式而言，订单等待时长小、车辆总行驶里程短、平台利润高且具有规模效应，是一种更优的网约车模式。

装
订
线

5 总结与展望

5.1 研究总结

本文提出了一种模型驱动的预测方法，仅依赖路网结构和每个 OD 对之间拼车需求和空车供给的平均到达率等简单参数，在比较宽松的假设下，就能够针对动态拼车服务中整个系统/每个订单的拼车成功率、预期绕行/共乘里程、车辆行驶里程、乘客等待时长等关键指标进行事前预测。本文基于 Wang 等人^[5]的工作，进一步考虑了空车供给的动态性和异质性，从而能建立更加准确、符合实际的数学模型。

本研究的主要贡献和结论具体阐述如下：

(1) 对动态拼车的整个过程进行了建模，包括随着订单和空车的随机到达而在 OD 对起点处形成的订单/空车队列，未匹配的订单被空车接驾后从起点到终点的匹配过程，以及订单/空车队列和未被匹配的订单流间的交互关系。通过求解一个不动点问题，获得了该系统稳定状态下各变量的值。再根据这些变量的值，计算了系统稳定状态下每个 OD 对间订单的关键指标以及衡量整个系统的效率和效益的指标。

(2) 对建立的数学模型的准确性进行了验证。对订单/空车排队队列分别通过排队论方法和离散事件仿真方法得到该队列在不同订单到达率、空车到达率和空车队列最大长度参数条件下的不同类型的订单/空车的流出速率。对于整个动态拼车系统，我们在网格网络上通过模型驱动的方法得到每个 OD 对间订单的关键指标，并与离散事件仿真方法得到的结果进行对比。结果表明，我们的模型具有相当高的预测精度。

(3) 利用我们的模型，分别在动态拼车模式和不拼车模式中，考察了不同空车供给率和平台规模的条件下，整个系统里订单、车辆和平台的整体效率和效益。结果表明，动态拼车模式相比于不拼车模式而言，订单等待时长小、车辆总行驶里程短、平台利润高且具有规模效应，是一种更优的网约车模式。

5.2 研究展望

在今后的研究中，我们还需进一步完善的内容如下：

(1) 空车到达率的内生关系与基于区域的空车到达率。服务每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的空车到达率与将乘客送至起点 o_w 附近区域的空车到达率相关联。在我们的模型中，空车到达率被假定为外生参数。在后续研究中，可以分析空车到达率与系统内部其他变量之间的内生关系，以使得模型更符合实际情况。此外，可以将基于 OD 对的空车到达率更改为基于区域的空车到达率，一辆空车到达某个区域后可以服务多个 OD 对间的订单。这将把本文中的订单/空车排队系统变为一个拥有多个服务器的排队系统，Adan 和 Weiss^[46] 为这样的系统提供了精妙的建模方法和极限概率闭式解。

(2) 前瞻性派单策略的进一步优化：基于 (1) 的结果，我们将可以进一步探究如何优化网约车平台的空车车队规模、定价、派单和空车调度等决策。在我们的工作论文中，探讨了如何利用 Wang 等人^[5]提出的模型设计一个前瞻性的派单策略。但是，由于模型的局限性，我们只考虑了不同派单策略可能会对订单未来的行驶里程产生的影响，而未考虑对不同区域车辆供给的影响。在今后的工作中，可以考虑这种影响，并进一步优化派单策略。

(3) 混合网约车模式中用户行为的建模：在第 4.3 节中，我们探讨了不同网约车模式中整个系统的效率和效益。然而，在实际场景中，用户可以选择不同的模式，其选择也由不同模式中他们获得的效用决定。在今后的研究中，我们可以对混合网约车模式中的用户行为进行建模，同时进一步分析整个系统在均衡状态下的效率和效益。通过平台的决策，也可以调整用户的效用，从而引导用户进行选择，以此优化整个系统的效率。

装
订
线

参考文献

- [1] 中国互联网络信息中心. 第 48 次中国互联网络发展状况统计报告[R]. 北京, 2021.
- [2] RODIER C J, et al. The effects of ride hailing services on travel and associated greenhouse gas emissions[M]. National Center for Sustainable Transportation, 2018.
- [3] 上海市人民政府. 上海市网络预约出租汽车经营服务管理若干规定（沪府令 48 号）[EB/OL]. 2016. http://www.caam.org.cn/info/chn/9/cate_104/con_5203089.html.
- [4] BURNS J. NYC becomes first major city to limit number of Uber and Lyft vehicles, set minimum wage[EB/OL]. 2018. <https://www.forbes.com/sites/janetwburns/2018/08/08/nyc-becomes-first-major-city-to-limit-number-of-uber-and-lyft-vehicles/>.
- [5] WANG J, WANG X, YANG S, et al. Predicting the matching probability and the expected ride/shared distance for each dynamic ridepooling order: A mathematical modeling approach[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2021, 154: 125-146.
- [6] WANG H, YANG H. Ridesourcing systems: A framework and review[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2019, 129: 122-155.
- [7] KE J, ZHENG H, YANG H, et al. Short-term forecasting of passenger demand under on-demand ride services: A spatio-temporal deep learning approach[J]. Transportation research part C: Emerging technologies, 2017, 85: 591-608.
- [8] WANG D, CAO W, LI J, et al. DeepSD: Supply-demand prediction for online car-hailing services using deep neural networks[C]//2017 IEEE 33rd international conference on data engineering (ICDE). 2017: 243-254.
- [9] KE J, YANG H, ZHENG H, et al. Hexagon-based convolutional neural network for supply-demand forecasting of ride-sourcing services[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2018, 20(11): 4160-4173.
- [10] ZHANG L, HU T, MIN Y, et al. A taxi order dispatch model based on combinatorial optimization[C]// Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining. 2017: 2151-2159.
- [11] KE J, QIN X, YANG H, et al. Predicting origin-destination ride-sourcing demand with a spatio-temporal encoder-decoder residual multi-graph convolutional network[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2021, 122: 102858.
- [12] LI C, ZHENG L, JIA N. Network-wide ride-sourcing passenger demand origin-destination matrix prediction with a generative adversarial network[J]. Transportmetrica A: Transport Science, 2022: 1-28.

- [13] MIAO F, LIN S, MUNIR S, et al. Taxi dispatch with real-time sensing data in metropolitan areas: A receding horizon control approach[C]//Proceedings of the ACM/IEEE Sixth International Conference on Cyber-Physical Systems. 2015: 100-109.
- [14] XU Z, LI Z, GUAN Q, et al. Large-scale order dispatch in on-demand ride-hailing platforms: A learning and planning approach[C]//Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. 2018: 905-913.
- [15] KONTOU E, GARIKAPATI V, HOU Y. Reducing ridesourcing empty vehicle travel with future travel demand prediction[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2020, 121: 102826.
- [16] ELMACHTOUB A N, GRIGAS P. Smart “predict, then optimize” [J]. Management Science, 2022, 68(1): 9-26.
- [17] MANDI J, STUCKEY P J, GUNS T, et al. Smart predict-and-optimize for hard combinatorial optimization problems[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence: volume 34. 2020: 1603-1610.
- [18] GAO Y, JIANG D, XU Y. Optimize taxi driving strategies based on reinforcement learning[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2018, 32(8): 1677-1696.
- [19] LIN K, ZHAO R, XU Z, et al. Efficient large-scale fleet management via multi-agent deep reinforcement learning[C]//Proceedings of the 24th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining. 2018: 1774-1783.
- [20] YU Z, HU M. Deep reinforcement learning with graph representation for vehicle repositioning[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2021, 23(8): 13094-13107.
- [21] LIANG E, WEN K, LAM W H, et al. An integrated reinforcement learning and centralized programming approach for online taxi dispatching[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 33(9): 4742-4756.
- [22] MAO C, LIU Y, SHEN Z J M. Dispatch of autonomous vehicles for taxi services: A deep reinforcement learning approach[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2020, 115: 102626.
- [23] ZHU Z, KE J, WANG H. A mean-field markov decision process model for spatial-temporal subsidies in ride-sourcing markets[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2021, 150: 540-565.
- [24] YU X, GAO S, HU X, et al. A markov decision process approach to vacant taxi routing with e-hailing [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2019, 121: 114-134.
- [25] YU X, GAO S. A batch reinforcement learning approach to vacant taxi routing[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2022, 139: 103640.

- [26] KE J, XIAO F, YANG H, et al. Learning to delay in ride-sourcing systems: a multi-agent deep reinforcement learning framework[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2020, 34(5): 2280-2292.
- [27] CHEN C, YAO F, MO D, et al. Spatial-temporal pricing for ride-sourcing platform with reinforcement learning[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2021, 130: 103272.
- [28] IGLESIAS R, ROSSI F, ZHANG R, et al. A BCMP network approach to modeling and controlling autonomous mobility-on-demand systems[J]. The International Journal of Robotics Research, 2019, 38(2-3): 357-374.
- [29] BRAVERMAN A, DAI J G, LIU X, et al. Empty-car routing in ridesharing systems[J]. Operations Research, 2019, 67(5): 1437-1452.
- [30] SANTI P, RESTA G, SZELL M, et al. Quantifying the benefits of vehicle pooling with shareability networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2014, 111(37): 13290-13294.
- [31] VAZIFEH M M, SANTI P, RESTA G, et al. Addressing the minimum fleet problem in on-demand urban mobility[J]. Nature, 2018, 557(7706): 534-538.
- [32] FAGNANT D J, KOCKELMAN K M. Dynamic ride-sharing and fleet sizing for a system of shared autonomous vehicles in austin, texas[J]. Transportation, 2018, 45: 143-158.
- [33] SANTOS D O, XAVIER E C. Dynamic taxi and ridesharing: A framework and heuristics for the optimization problem[C]//Twenty-third international joint conference on artificial intelligence. 2013.
- [34] HOSNI H, NAOUM-SAWAYA J, ARTAIL H. The shared-taxi problem: Formulation and solution methods[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2014, 70: 303-318.
- [35] JUNG J, JAYAKRISHNAN R, PARK J Y. Dynamic shared-taxi dispatch algorithm with hybrid-simulated annealing[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2016, 31(4): 275-291.
- [36] ALONSO-MORA J, SAMARANAYAKE S, WALLAR A, et al. On-demand high-capacity ride-sharing via dynamic trip-vehicle assignment[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2017, 114(3): 462-467.
- [37] AGATZ N, ERERA A L, SAVELSBERGH M W, et al. Dynamic ride-sharing: A simulation study in metro Atlanta[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2011, 45: 1450-1464.
- [38] MASOUD N, JAYAKRISHNAN R. A real-time algorithm to solve the peer-to-peer ride-matching problem in a flexible ridesharing system[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2017, 106: 218-236.
- [39] WANG X, AGATZ N, ERERA A. Stable matching for dynamic ride-sharing systems[J]. Transportation Science, 2018, 52(4): 850-867.

- [40] LI Y, LIU Y. Optimizing flexible one-to-two matching in ride-hailing systems with boundedly rational users[J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2021, 150: 102329.
- [41] YU X, SHEN S. An integrated decomposition and approximate dynamic programming approach for on-demand ride pooling[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2019, 21(9): 3811-3820.
- [42] SHAH S, LOWALEKAR M, VARAKANTHAM P. Neural approximate dynamic programming for on-demand ride-pooling[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence: volume 34. 2020: 507-515.
- [43] DAGANZO C F, OUYANG Y. A general model of demand-responsive transportation services: From taxi to ridesharing to dial-a-ride[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2019, 126: 213-224.
- [44] DAGANZO C F, OUYANG Y, YANG H. Analysis of ride-sharing with service time and detour guarantees[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2020, 140: 130-150.
- [45] LIU Y, OUYANG Y. Planning ride-sharing services with detour restrictions for spatially heterogeneous demand: A multi-zone queuing network approach[EB/OL]. 2022. <https://arxiv.org/abs/2208.02219>.
- [46] ADAN I, WEISS G. Exact FCFS matching rates for two infinite multitype sequences[J]. Operations Research, 2012, 60(2): 475-489.
- [47] ROSS S M. Introduction to probability models[M]. Academic press, 2014.

A 符号表

表 A.1: 参数表

符号	含义
$G(\mathbf{N}, \mathbf{A})$	一般路网
\mathbf{N}	路网中的节点集合
\mathbf{A}	路网中的路段集合
t_a	路段 $a \in \mathbf{A}$ 上的通行时间
\mathbf{W}	具有拼车需求的 OD 对集合
λ_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的平均到达率
μ_w	服务 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的空车的平均到达率
\mathbf{A}_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间路径上的路段集合
a_w^i	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间路径上的第 i 个路段
$s(w)$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的寻车者状态
$t(a, w)$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间、路段 $a \in \mathbf{A}_w$ 上的接载者状态
$q(w)$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的排队者状态
$o(a, w)$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 之间、进入路段 $a \in \mathbf{A}_w$ 前的寻人者状态
\mathbf{T}_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的接载者状态集合
\mathbf{O}_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的寻人者状态集合
\mathbf{S}	所有寻车者状态的集合
\mathbf{T}	所有接载者状态的集合
\mathbf{Q}	所有排队者状态的集合
\mathbf{O}	所有寻人者状态的集合
$m_{a,\omega}^w$	寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 和接载者状态 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}$ 组成的寻车者 - 接载者匹配对
$c_{a,\omega}^w$	排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 和寻人者状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}$ 组成的排队者 - 寻人者匹配对
L_w^0	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间始终被一辆车单独服务的订单的行程距离
\mathbf{M}_{st}	满足匹配条件的所有寻车者 - 接载者状态匹配对组成的集合
$u_{st}(m_{a,\omega}^w)$	匹配对 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 的效用
$\mathbf{T}_{s(w)}$	寻车者状态 $s(w), w \in \mathbf{W}$ 匹配的接载者状态集合
$\mathbf{S}_{t(a,\omega)}$	接载者状态 $t(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$ 匹配的寻车者状态集合
$\mathbf{T}_{s(w)}^{>t(a,\omega)}$	与状态 $s(w), w \in \mathbf{W}$ 匹配的、比 $t(a, \omega) \in \mathbf{T}_{s(w)}$ 匹配效用更高的接载者状态集合
\mathbf{C}_{qo}	满足匹配条件的所有排队者 - 寻人者状态匹配对组成的集合
$u_{qo}(c_{a,\omega}^w)$	匹配对 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 的效用
$\mathbf{O}_{q(w)}$	排队者状态 $q(w), w \in \mathbf{W}$ 匹配的寻人者状态集合
$\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$	寻人者状态 $o(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$ 匹配的排队者状态集合
$\mathbf{Q}_{o(a,\omega)}^{>q(w)}$	与状态 $o(a, \omega) \in \mathbf{O}$ 匹配的、比 $q(w) \in \mathbf{Q}_{o(a,\omega)}$ 匹配效用更高的排队者状态集合
$\mathcal{S}_{q(w)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的订单/空车排队过程的马尔可夫链的状态集合
V	订单/空车排队队列中空车的最大数量
$L_{psg}(w, (a, \omega))$	匹配 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 中等待接驾的订单的行驶里程
$L_{veh}(w, (a, \omega))$	匹配 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 中接驾车辆上的订单的行驶里程
$e(w, (a, \omega))$	匹配 $m_{a,\omega}^w \in \mathbf{M}_{st}$ 或 $c_{a,\omega}^w \in \mathbf{C}_{qo}$ 中两个订单的共乘里程
v	系统中车辆的平均行驶速度
h_{psg}	乘客每行驶单位距离的费用
h_{veh}	车辆每行驶单位距离的成本
h_{drv}	司机每单位时间的薪资
h_{wat}	订单每等待单位时间产生的成本

表 A.2: 变量表

符号	含义
$P_{s(w)}$	订单在寻车者状态 $s(w) \in \mathbf{S}$ 被匹配的概率
$P_{o(a,w)}$	订单在寻人者状态 $o(a,w) \in \mathbf{O}$ 被匹配的概率
$P_{t(a,w)}$	订单在接载者状态 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 被匹配的概率
$\rho_{q(w)}$	排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 至少有一个订单的概率
$\tau_{t(a,w)}$	订单在接载者状态 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 的平均停留时间
$\rho_{t(a,w)}$	接载者状态 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 至少有一个订单的概率
$\zeta_{q(w)}^{o(a,w)}$	在 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 中的排队者获得来自 $o(a,w) \in \mathbf{O}_{q(w)}$ 匹配机会的平均到达率
$\zeta_{q(w)}$	到达排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的匹配机会平均到达率
$\eta_{t(a,w)}^{s(w)}$	在 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 中的接载者获得来自 $s(w) \in \mathbf{S}_{t(a,w)}$ 匹配机会的平均到达率
$\eta_{t(a,w)}$	到达接载者状态 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 的匹配机会平均到达率
$\tilde{\lambda}_{q(w)}$	没有订单处于排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 时订单到达 $q(w)$ 的平均到达率
$\bar{\lambda}_{q(w)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的订单到达排队者状态 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的平均到达率
$\phi_{o(a,w)}$	订单到达寻人者状态 $o(a,w) \in \mathbf{O}$ 的平均到达率
$\lambda_{t(a,w)}$	订单到达接载者状态 $t(a,w) \in \mathbf{T}$ 的平均到达率
$\mu_w^{(-)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间空车到达时有 V 辆其他空车正在等待而直接离开的速率
$\mu_w^{(+)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间空车接驾订单离开订单/空车排队队列的速率
$\mu_w^{(1)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间空车接驾一个订单离开订单/空车排队队列的速率
$\mu_w^{(2)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间空车接驾两个订单离开订单/空车排队队列的速率
$\lambda_w^{(1)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单被空车单独接驾而离开 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的速率
$\lambda_w^{(2)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单与同一 OD 对间订单匹配而离开 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的速率
$\lambda_w^{(o)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单与一辆被部分占用的车辆匹配而离开 $q(w) \in \mathbf{Q}$ 的速率
$J_{q(w)}^{\text{veh}}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单/空车排队队列空车排队的平均长度
$J_{q(w)}^{\text{psg}}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单/空车排队队列订单排队的平均长度
$\tau_{q(w)}$	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单/空车排队队列订单排队的平均时长
P_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的匹配概率
$L_{s(w)} (L_{t(a,w)})$	状态 $s(w) \in \mathbf{S} (t(a,w) \in \mathbf{T})$ 中被匹配的订单的预期行驶里程
$L_{q(w)}^{(o)} (L_{o(a,w)})$	状态 $q(w) \in \mathbf{Q} (o(a,w) \in \mathbf{O})$ 中被其他 OD 对间的订单匹配的订单的预期行驶里程
L_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期行驶里程
r_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期绕行里程
$e_{s(w)} (e_{t(a,w)})$	状态 $s(w) \in \mathbf{S} (t(a,w) \in \mathbf{T})$ 中被匹配的订单的预期共乘里程
$e_{q(w)}^{(o)} (e_{o(a,w)})$	状态 $q(w) \in \mathbf{Q} (o(a,w) \in \mathbf{O})$ 中被其他 OD 对间的订单匹配的订单的预期共乘里程
e_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期共乘里程
τ_w	OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间订单的预期等待时长
\bar{P}	系统中所有订单的平均拼车成功率
$\bar{\tau}$	系统中所有订单的平均等待时长
\bar{L}	系统中所有车辆每单位时间的平均行驶里程
$\bar{N}^{(+)}$	系统中平均每单位时间被占用的车辆数量
$\bar{\gamma}$	系统中空车的平均占用率
\bar{N}	系统中平均每单位时间的车辆总数
\bar{L}^0	系统中所有订单全程都被单独接驾时平均每单位时间产生的行驶里程
\bar{H}	平台平均每单位时间的可以获得的净利润

B 命题与定理证明

B.1 命题3.1和命题3.2证明

考察平衡方程 (3.3) 至 (3.7):

$$\lambda P_{(0,V)} = \mu P_{(0,V-1)} \tag{3.3}$$

$$(\tilde{\lambda}_q + \mu) P_{(0,j)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,j+1)} + \mu P_{(0,j-1)}, j \in [1, V-1] \tag{3.4}$$

$$(\tilde{\lambda}_q + \mu) P_{(0,0)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,1)} + (\mu + \zeta_q) P_{(1,0)} + \mu P_{(2,0)} \tag{3.5}$$

$$(\lambda + \mu + \zeta_q) P_{(1,0)} = \tilde{\lambda}_q P_{(0,0)} + \zeta_q P_{(2,0)} + \mu P_{(3,0)} \tag{3.6}$$

$$(\lambda + \mu + \zeta_q) P_{(i,0)} = \lambda P_{(i-1,0)} + \zeta_q P_{(i+1,0)} + \mu P_{(i+2,0)}, i \in [2, +\infty) \tag{3.7}$$

将等式 (3.3) 代入等式 (3.4) 中, 得到:

$$P_{(0,j-1)} = \frac{\tilde{\lambda}_q}{\mu} P_{(0,j)} = \rho_1^{j+1} P_{(0,V)}, j \in [1, V] \tag{B.1}$$

其中, 我们定义了比值 $\rho_1 = \frac{\tilde{\lambda}_q}{\mu}$.

将等式 (B.1) 代入等式 (3.5) 中, 得到:

$$\tilde{\lambda}_q P_{(0,0)} = (\mu + \zeta_q) P_{(1,0)} + \mu P_{(2,0)} \tag{B.2}$$

将等式 (B.2) 代入等式 (3.6) 中, 得到:

$$\lambda P_{(1,0)} = (\mu + \zeta_q) P_{(2,0)} + \mu P_{(3,0)} \tag{B.3}$$

将等式 (B.3) 代入等式 (3.7) 中, 得到:

$$\lambda P_{(i,0)} = (\mu + \zeta_q) P_{(i+1,0)} + \mu P_{(i+2,0)}, i \in [1, +\infty) \tag{B.4}$$

方程 (B.4) 的解可以表示为 $P_{(i,0)} = \rho_2^{i-1} P_{(1,0)}, i \in [1, +\infty)$ 的形式, 我们可以通过求解特征方程来获得 ρ_2 的值:

$$\mu x^2 + (\mu + \zeta_q)x - \lambda = 0 \tag{B.5}$$

省略负解, 得到:

$$\rho_2 = \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{(\mu + \zeta_q)^2 + 4\mu\lambda} - (\mu + \zeta_q) \right) \tag{B.6}$$

于是,

$$P_{(i,0)} = \rho_2^{i-1} P_{(1,0)}, i \in [1, +\infty) \tag{B.7}$$

同时, 根据等式 (B.1), (B.2) 和 (B.7), 我们可以得到:

$$P_{(1,0)} = \frac{\tilde{\lambda}_q \rho_1^V}{(\mu + \zeta_q) + \mu \rho_2} P_{(0,V)} \quad (\text{B.8})$$

利用归一化方程:

$$\sum_{j=0}^V P_{(0,j)} + \sum_{i=1}^{+\infty} P_{(i,0)} = 1 \quad (\text{B.9})$$

可以得到:

$$P_{(0,V)} \left[1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_1^V + \frac{\tilde{\lambda}_q \rho_1^V}{(\mu + \zeta_q) + \mu \rho_2} (1 + \rho_2 + \rho_2^2 + \dots) \right] = 1 \quad (\text{B.10})$$

其中, 根据 ρ_2 的定义, 有:

$$\frac{\tilde{\lambda}_q \rho_1^V}{(\mu + \zeta_q) + \mu \rho_2} = \frac{\rho_1^{V+1}}{\left(1 + \frac{\zeta_q}{\mu}\right) + \rho_2} = \frac{\rho_1^{V+1}}{\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_q}} \quad (\text{B.11})$$

最后, 根据式 (B.10) 和式 (B.11), 即可得到命题3.1和命题3.2. □

B.2 命题 3.3 的证明

考察式 (3.36):

$$\tilde{\lambda}_{q(w)} = \lambda_w \left(1 - \frac{p_{s(w)}}{1 - \rho_{q(w)}} \right), w \in W \quad (3.36)$$

简便起见, 我们继续省略 OD 对的标志 w , 并将式 (3.32) 和 (3.10) 代入上式中的 ρ_q 和 $P_{(0,V)}$, 得到:

$$\tilde{\lambda}_q = \lambda \left(1 - \frac{p_s}{1 - \rho_q} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$= \lambda \lim_{\tilde{\rho}_1 \rightarrow \rho_1} \left(1 - p_s \cdot \frac{1 - \tilde{\rho}_1}{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}} \left(\frac{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}}{1 - \tilde{\rho}_1} + \frac{\tilde{\rho}_1^{V+1}}{\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_q}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_2} \right) \right) \quad (\text{B.13})$$

$$= \lambda \lim_{\tilde{\rho}_1 \rightarrow \rho_1} \left(1 - p_s - p_s \cdot \frac{(1 - \tilde{\rho}_1) \tilde{\rho}_1^V \tilde{\lambda}_q}{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}} \cdot \frac{\rho_2}{\lambda (1 - \rho_2)} \right) \quad (\text{B.14})$$

等式两边同时除以 μ , 得到:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu} (1 - p_s) - p_s \cdot \lim_{\tilde{\rho}_1 \rightarrow \rho_1} \frac{(1 - \tilde{\rho}_1) \tilde{\rho}_1^{V+1}}{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}} \cdot \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \quad (\text{B.15})$$

定义函数 f :

$$f(\rho_1) = \lim_{\tilde{\rho}_1 \rightarrow \rho_1} \left(\tilde{\rho}_1 + K \cdot \frac{(1 - \tilde{\rho}_1) \tilde{\rho}_1^{V+1}}{1 - \tilde{\rho}_1^{V+1}} \right), \tilde{\rho}_1 \in [0, +\infty) \quad (\text{B.16})$$

要证明式 (3.36) 有唯一解, 即证明下式在函数定义域 $\rho_1 \in [0, +\infty)$ 内有唯一解: $f(\rho_1) = B$ 其中,

$$K = p_s \cdot \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} > 0, B = \frac{\lambda}{\mu} (1 - p_s) \geq 0 \quad (\text{B.17})$$

考察函数 $f(x)$:

$$f(0) = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$f(1) = 1 + K \cdot \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{V+1}} \quad (\text{B.19})$$

$$= 1 + K \cdot \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\rho_1 - 1}{o((\rho_1 - 1)^2) + (V + 1)(\rho_1 - 1)} \quad (\text{B.20})$$

$$= 1 + \frac{K}{V + 1} \quad (\text{B.21})$$

$$f(+\infty) = +\infty + K \cdot \lim_{\rho_1 \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \rho_1)\rho_1^{V+1}}{1 - \rho_1^{V+1}} \quad (\text{B.22})$$

$$= +\infty \quad (\text{B.23})$$

对 $f(x)$ 求导, 得:

$$f'(x) = \frac{K(x^{V+2} - (V + 2)x + V + 1)x^V}{(1 - x^{V+1})^2} + 1 \quad (\text{B.24})$$

令:

$$g(x) = x^{V+2} - (V + 2)x + V + 1 \quad (\text{B.25})$$

对 $g(x)$ 求导, 得:

$$g'(x) = (V + 2)x^{V+1} - (V + 2) \quad (\text{B.26})$$

当 $x \geq 1$ 时, 有 $g'(x) \geq 0$, 因此函数 $g(x)$ 单调递增, $g(x) \geq g(1) = 0$, $f'(x) = \frac{Kg(x)x^V}{(1 - x^{V+1})^2} + 1 \geq 1 > 0$. 令:

$$h(x) = (1 - x^{V+1})^2 f'(x) \quad (\text{B.27})$$

$$= K(x^{V+2} - (V + 2)x + V + 1)x^V + (1 - x^{V+1})^2 \quad (\text{B.28})$$

$$= (K + 1)x^{2V+2} - (K(V + 2) + 2)x^{V+1} + K(V + 1)x^V + 1 \quad (\text{B.29})$$

对 $h(x)$ 求导, 得:

$$h'(x) = 2(K + 1)(V + 1)x^{2V+1} - (K(V + 2) + 2)(V + 1)x^V + K(V + 1)Vx^{V-1} \quad (\text{B.30})$$

$$= (V + 1)x^{V-1} (2(K + 1)x^{V+2} - (K(V + 2) + 2)x + KV) \quad (\text{B.31})$$

$$= (V + 1)x^{V-1} (2(K + 1)(x^{V+2} - 1) - (2(K + 1) + KV)(x - 1)) \quad (\text{B.32})$$

再令:

$$p(x) = 2(K + 1)(x^{V+2} - 1) - (2(K + 1) + KV)(x - 1) \quad (\text{B.33})$$

对 $p(x)$ 求导, 得:

$$p'(x) = 2(K+1)(V+2)x^{V+1} - (2(K+1) + KV) \quad (\text{B.34})$$

由于 $p'(0) = -(2(K+1) + KV) < 0, p'(1) = K(V+2) + 2(V+1) > 0$, 根据函数 $p'(x)$ 的单调性, 当 $x \in (0, x_p^*)$ 时, $p'(x) < 0, p(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_p^*, 1)$ 时, $p'(x) > 0, p(x)$ 单调递增. 其中,

$$x_p^* = \sqrt[V+1]{\frac{2(K+1) + KV}{2(K+1)(V+2)}} \quad (\text{B.35})$$

由于 $p(0) = KV > 0, p(1) = 0$, 根据函数 $p(x)$ 的单调性和零点存在性定理, 当 $x \in (0, x_h^*)$ 时, $h'(x) = (V+1)x^{V-1}p(x) > 0, h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_h^*, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减. 其中,

$$p(x_h^*) = 0, x_h^* \in (0, 1) \quad (\text{B.36})$$

由于 $h(0) = 1 > 0, h(1) = 0$, 根据函数 $h(x)$ 的单调性, 因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) = (1 - x^{V+1})f'(x) > 0$, 因此 $f'(x) > 0$.

综上所述, 函数 $f'(x) > 0, x \in (0, +\infty)$, 因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内严格单调递增, 又由于 $f(0) = 0, f(+\infty) = +\infty$ 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, 因此 $f(\rho_1) = B$ 有唯一解, 因此 3.36 有唯一解 $\tilde{\lambda}_q$, 得证. □

B.3 命题 3.4 的证明

根据 Brouwer 的不动点定理, 对于一个形如 $X = F(X)$ 的不动点问题, 如果可行域 Ω 是紧且非空的, $F(X)$ 在 Ω 上连续且 $F(X) \in \Omega$ 对于任意 $X \in \Omega$ 都成立, 那么不动点问题在 Ω 上至少有一个解.

易知, 式 (3.41) 中的 Ω 是紧且非空的.

由式 (3.22), (3.26), (3.25), (3.38) 和式 (3.39) 可得 $\mathbf{p}_s(X), \mathbf{p}_o(X), \mathbf{p}_t(X), \phi_o(X)$ 和 $\lambda_t(X)$ 在 Ω 上均为连续函数.

由式 (3.32) 与以下事实:

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{V+1}} = \lim_{\rho_1 \rightarrow 1} \frac{\rho_1 - 1}{o((\rho_1 - 1)^2) + (V+1)(\rho_1 - 1)} = \frac{1}{V+1} \quad (\text{B.37})$$

可得, $\rho_q(X)$ 在 Ω 上连续.

由式 (3.31) 与以下事实:

$$\lim_{\eta_t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-\eta_t \bar{t}_a)}{\eta_t} = \lim_{\eta_t \rightarrow 0} \frac{\eta_t \bar{t}_a}{\eta_t} = \bar{t}_a \quad (\text{B.38})$$

可得, $\rho_t(X)$ 在 Ω 上连续.

由附录 B.2 得, 式 (B.16) 中的函数 $f(\rho_1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 由反函数连续性定理, $f(\rho_1)$ 的反函数 f^{-1} 同样连续. 因此, $\tilde{\lambda}_q(X) = \rho_1(X)\mu(X)$ 在 Ω 上连续. 另, 由于 $f(\rho_1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增且值域为 $(0, +\infty)$, $f(\rho_1)$ 的反函数 f^{-1} 在 $(0, +\infty)$ 上也严格单调递增.

由式 (3.22), (3.26), (3.25) 和式 (3.32) 得, 对于任意 $X \in \Omega$ 上都有 $0 \leq \mathbf{p}_s(X), \mathbf{p}_o(X), \mathbf{p}_t(X), \rho_q \leq 1$. 由式 (3.15) 得 $\bar{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w, w \in \mathbf{W}$. 下证 $\phi_{o(a_w^1, w)} = \mu_w^{(1)} \leq \bar{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w, w \in \mathbf{W}$. 当 $\rho_1 \neq 1$ 时, 有:

$$\phi_{o(a_w^1, w)} = \mu_w^{(1)} \leq \bar{\lambda}_{q(w)} \tag{B.39}$$

$$\Leftrightarrow \mu \frac{\rho_1(1-\rho_1^V)}{1-\rho_1} P_{(0,V)} \leq \bar{\lambda}_q \tag{B.40}$$

$$\Leftrightarrow \mu \frac{\rho_1(1-\rho_1^V)}{1-\rho_1} \leq \bar{\lambda}_q \left(\frac{1-\rho_1^{V+1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_1/\rho_2} \cdot \frac{1}{1-\rho_2} \right) \tag{B.41}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_1(1-\rho_1^V)}{1-\rho_1} \leq \rho_1 \left(\frac{1-\rho_1^{V+1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1^{V+1}}{\rho_1/\rho_2} \cdot \frac{1}{1-\rho_2} \right) \tag{B.42}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\rho_1^V(1-\rho_1)}{1-\rho_1} \leq \rho_1^V \cdot \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \tag{B.43}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \tag{B.44}$$

由于 $\rho_2 \in (0, 1)$, 因此式 (B.44) 成立, 因此有 $\phi_{o(a_w^1, w)} \leq \lambda_w$; 当 $\rho_1 = 1$ 时, 也显然成立. 从而根据式 (3.39) 和 (3.38), 对于任意 $X \in \Omega$ 上都有 $0 \leq \phi_o(X), \lambda_t(X) \leq \lambda$.

在 $\eta_{t(a,w)} = 0$ 时, $\rho_{t(a,w)} = \lambda_{t(a,w)} \bar{t}_a$ 且 $0 \leq \rho_{t(a,w)} \leq 1$; 当 $\eta_{t(a,w)} > 0$ 时, 根据式 (3.29) 和式 (3.31), 我们有 $\rho_{t(a,w)} \geq 0$, 且有以下不等式成立:

$$\rho_{t(a,w)} = \lambda_{t(a,w)} \left[\int_0^{\bar{t}_a} t \eta_{t(a,w)} \exp(-\eta_{t(a,w)} t) dt + (1 - p_{t(a,w)}) \bar{t}_a \right] \tag{B.45}$$

$$= \lambda_{t(a,w)} \bar{t}_a \left[\int_0^{\bar{t}_a} \frac{t}{\bar{t}_a} \eta_{t(a,w)} \exp(-\eta_{t(a,w)} t) dt + (1 - p_{t(a,w)}) \right] \tag{B.46}$$

$$\leq \lambda_{t(a,w)} \bar{t}_a \left[\int_0^{\bar{t}_a} \eta_{t(a,w)} \exp(-\eta_{t(a,w)} t) dt + (1 - p_{t(a,w)}) \right] \tag{B.47}$$

$$= \lambda_{t(a,w)} \bar{t}_a \leq \max \{ \lambda_w \bar{t}_a, a \in A_w, w \in W \} \leq 1 \tag{B.48}$$

因此, 对于任意 $X \in \Omega$ 上都有 $0 \leq \rho_t(X) \leq 1$.

最后, 我们证明 $0 \leq \tilde{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w, w \in \mathbf{W}$. 由于附录 B.2 式 (B.16) 中函数 $f(\rho_1)$ 的反函数 f^{-1} 在函数 $f(\rho_1)$ 的值域 $(0, +\infty)$ 上也严格单调递增. 因此, 要证 $0 \leq \tilde{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w$, 我们只需要证明 $f\left(\frac{\lambda_w}{\mu_w}\right) \geq B$, 其中 $B = \frac{\lambda}{\mu} (1 - p_s)$. 当 $\rho_1 \neq 1$ 时, 有:

$$f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \geq B \tag{B.49}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + p_s \cdot \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{V+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{V+1}} \geq \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) (1 - p_s) \tag{B.50}$$

$$\Leftrightarrow p_s \left(\frac{\rho_2}{1-\rho_2} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{V+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{V+1}} + 1 \right) \geq 0 \tag{B.51}$$

式 (B.51) 恒成立, 又由于 f^{-1} 在函数 $f(\rho_1)$ 的值域 $(0, +\infty)$ 上也严格单调递增, 因此有 $\frac{\tilde{\lambda}_{q(w)}}{\mu_w} \leq \frac{\lambda_w}{\mu_w}, w \in \mathbf{W}$, 即 $\tilde{\lambda}_{q(w)} \leq \lambda_w$; 当 $\rho_1 = 1$ 时, 也显然成立. 因此, 对于任意 $X \in \Omega$ 上都有 $0 \leq \tilde{\lambda}_q(X) \leq \lambda$.

综上, 我们证明了不动点的存在性. □

装
订
线

C 符合匹配条件的匹配对集合检索步骤

根据式 (2.17)，若排队者-寻人者匹配对 $\langle q(w), o(a, \omega) \rangle$ 符合匹配条件，则寻车者-接载者匹配对 $\langle s(w), t(a, \omega) \rangle$ 一定也符合匹配条件。因此，我们只需要首先筛选符合条件的寻车者-接载者匹配对 $\langle s(w), t(a, \omega) \rangle$ ，再根据式 (2.17) 筛选符合条件的排队者-寻人者匹配对即可。因此，在该附录，我们重点介绍如何快速筛选符合条件的寻车者-接载者匹配对。

为了找到符合接驾距离匹配条件的寻车者-接载者匹配对，我们首先为每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 生成子图 $G(\mathbf{N}_{o_w}^{\text{EG}}, \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}})$ ，称为以 o_w 为中心的自我中心 (EGO) 图，该图包括所有距离起点节点 o_w 不超过 \bar{R} 的节点和边。对于任意接载者状态 $t(a, \omega), a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}$ ，为了检查接收距离条件，我们可以检查是否有 $a \in \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}}$ 。如图 C.1 所示，它是一个人工网格网络，如果将 \bar{R} 设置为从 2 格（包括）到 2.5 格（不包括）的任意值，OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的 EGO 图 $G(\mathbf{N}_{o_w}^{\text{EG}}, \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}})$ 如图中黑色线条所示。网络上接收者状态 $t(a_1, \omega_1)$ 和 $t(a_2, \omega_2)$ 。很容易看出，蓝色接收者状态的连接 a_1 属于该 EGO 图。因此，它们与寻求者状态 $s(w)$ 的匹配符合接驾距离匹配条件。然而，红色接收者状态 $t(a_2, \omega_2)$ 与 $s(w)$ 之间的匹配是不允许的，因为 $a_2 \notin \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}}$ ，这意味着接驾距离匹配条件没有得到满足。

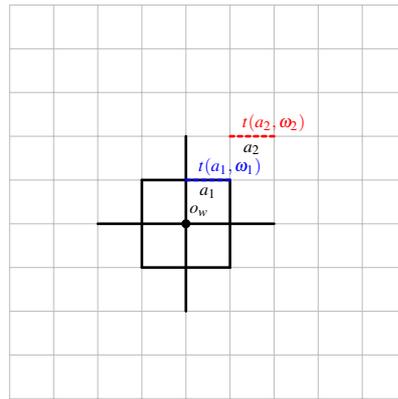


图 C.1: 网格网络图中 EGO 图 $G(\mathbf{N}_{o_w}^{\text{EG}}, \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}})$ 的例子

为每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 生成 EGO 图可以使用调整后的 Dijkstra 算法实现。除了需要限制图中的边和节点到中心节点 o_w 的距离之外，所有步骤都与原始 Dijkstra 算法相同。由于这种限制的存在，每个 EGO 图中最多有 $\overline{\text{deg}}^{\lceil \bar{R}/l \rceil}$ 个链接，其中 $\overline{\text{deg}}$ 和 l 分别是 $G(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ 中节点的最大度数和边的最小长度。此外，图中节点数最多是边数加一，因此，这一步的时间复杂度为 $O\left(\left(\overline{\text{deg}}^{\lceil \bar{R}/l \rceil}\right)^2 |\mathbf{W}|\right)$ 。为了存储这些 EGO 图以及其中每个节点到中心节点的距离，空间复杂度为 $O\left(\overline{\text{deg}}^{\lceil \bar{R}/l \rceil} |\mathbf{W}|\right)$ 。为了检查 $a \in \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}}$ 是否成立，需要进行线性搜索，时间复杂度为 $O\left(\overline{\text{deg}}^{\lceil \bar{R}/l \rceil}\right)$ 。

根据图 2.2，匹配对 $m_{a,\omega}^w$ 产生的绕行距离具体可以通过如下方式计算：

$$l^{\text{dt}}(m_{a,\omega}^w) = \min \left\{ \max \left\{ \begin{array}{l} l(o_w, d_\omega) + l(d_\omega, d_w) - l(o_w, d_w) \\ l(n_a, o_w) + l(o_w, d_\omega) - l(n_a, d_\omega) \end{array} \right\}, \begin{array}{l} l(n_a, o_w) + l(o_w, d_w) + l(d_w, d_\omega) - l(n_a, d_\omega) \end{array} \right\}, \quad (\text{C.1})$$

在公式 (C.1) 中，我们可以从每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 的 EGO 图中得到距离 $l(n_a, o_w)$ 。距离 $l(o_w, d_w)$ 是 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 间的最短距离，在生成所有接载者或寻车者状态时可以预先存储，这将耗费 $O(|\mathbf{W}|)$ 的内存。为了获取绕行距离 $l^{dt}(m_{a,\omega}^w)$ ，剩余需要计算的两点间的距离都始于或终于接载者的目的地节点 d_ω 。我们可以执行 $O(1)$ 次一般的最短路径算法来获取从路网上的一个节点到所有节点间的最短距离（或者反转后从所有节点出发到一个节点的所有最短距离）。因此，将检查匹配 $m_{a,\omega}^w, a \in \mathbf{A}_\omega, \omega \in \mathbf{W}, w \in \mathbf{W}$ 的绕行距离的工作按接载者的目的地节点 d_ω 进行分组计算效率会更高。对于每个寻车者 - 接载者匹配对，我们首先使用两次 Dijkstra 算法计算从 d_ω 到所有节点的最短距离，或者所有节点到 d_ω 的最短距离，这有 $O(|\mathbf{W}||\mathbf{N}|^2)$ 的时间复杂度。然后，为了检查 $|\mathbf{S}||\mathbf{T}|$ 个状态对的绕行距离匹配条件，只需要从上述结果中搜索 $l(n_a, o_w)$ 、 $l(\cdot, d_\omega)$ 和 $l(d_\omega, \cdot)$ 的距离，这需要 $O(|\mathbf{N}| + \overline{\text{deg}}^{[R/L]})$ 的时间。至于空间复杂度，只需要 $O(|\mathbf{N}|)$ 的内存来存储最短距离的结果，因为它们是按 o_ω 逐组使用的，因此不需要同时存储所有距离。

最后，我们可以并行地检查寻车者 - 接载者匹配对是否满足两个匹配条件、检索得到所有满足条件的匹配对的集合 \mathbf{M}_s 。这主要包括以下两个步骤：

1. 将所有 OD 对分配给 p 个进程，并为每个分配给进程的 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 生成其检索者状态 $s(w)$ 、EGO 图 $G(\mathbf{N}_{o_w}^{\text{EG}}, \mathbf{A}_{o_w}^{\text{EG}})$ 和所有接载者状态 $t(a, w), a \in \mathbf{A}_w$ 。将结果传递给主进程并组合。生成接载者状态时，需要为每个 OD 对执行一次最短路径算法。因此，在此子步骤中，对于每个 OD 对，时间复杂度为 $O(|\mathbf{N}|^2 + \overline{\text{deg}}^{[R/L]})$ 。
2. 将所有 OD 对分成 p 个部分，并将相同 OD 对生成的接载者状态分配给各自的进程。然后，按照前述方法在每个进程中检查每个寻车者和接载者匹配对之间的两个匹配条件。如果两个条件都满足，则将状态对存储为 \mathbf{M}_s 中的一个元素。在这里，对于每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ ，时间复杂度为 $O(|\mathbf{N}|^2 + |\mathbf{S}||\mathbf{T}_w|(\overline{\text{deg}}^{[R/L]} + |\mathbf{N}|))$ ，其中 $\mathbf{T}_w = \{t(a, w) \mid a \in \mathbf{A}_w\}$ 是由 OD 对 w 生成的接载者状态的集合。

D 不拼车模式下订单关键指标计算

在不拼车模式下，每个 OD 对 $w \in \mathbf{W}$ 起点处的订单/空车等待队列可以建模为一个平均到达率为 λ_w 、平均服务率为 μ_w 的生灭过程，因此有命题^{[47] 第 8.3 节}：

命题 D.1. 该排队系统稳定的条件是 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

命题 D.2. 该排队系统中状态 $s \in \mathcal{S}_q$ 的极限概率 P_s 为

$$P_s = \begin{cases} \rho^{V+i} P_{(0,V)}, s = (i, 0), i = [1, +\infty) \\ \rho^{V-j} P_{(0,V)}, s = (0, j), j \in [0, V] \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

其中，状态 $(0, V) \in \mathcal{S}_q$ 的极限概率 $P_{(0,V)}$ 为

$$P_{(0,V)} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{D.2})$$

空车（订单）排队的长度 l_q^{veh} (l_q^{psg}) 通过对马尔可夫链中不同状态下的排队空车（订单）数按状态的极限概率进行加权平均得到：

$$l_q^{\text{veh}} = \sum_{j=1}^V j P_{(0,j)} = \sum_{j=1}^V j \rho_1^{V-j} P_{(0,V)} \quad (\text{D.3})$$

$$l_q^{\text{psg}} = \sum_{i=1}^{+\infty} i P_{(i,0)} = \rho^V \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (\text{D.4})$$

根据 Little 法则，进而可以得到订单在队列中的平均等待时长 τ_q ：

$$\tau_q = l_q^{\text{psg}} / \lambda = \rho^V \cdot \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (\text{D.5})$$

由于没有订单进行拼车，易知 $P_w = 0, e_w = 0, r_w = 0, w \in \mathbf{W}$ ；订单的平均等待时长 $\tau_w = \tau_q$ 。根据每个 OD 对间订单的这些指标，再利用式 (3.55)–(3.62)，即可计算不拼车模式下整个系统的关键指标。